PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1921. Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1921. 22. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

E. Günther, Über die Messung von Tourenzahlen mit Hilfe stroboskopischer Erscheinungen im Wechselstrombogenlicht. S. 369.

A. Ilgner, Über die Dichte von Packungen und die Fallgeschwindigkeit von Lykopodium. S. 370.

M. Wolfke, Einsteinsche Lichtquanten und räumliche Struktur der Strahlung. S. 375.

H. Reichenbach, Erwiderung auf H. Dinglers Kritik an der Relativitätstheorie. S. 379.

P. Gruner, Eine elementare geometrische Darstellung der Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie. S. 384.

E. Guillaume, Graphische Darstellung der Optik bewegter Körper. S. 386.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

J. Franck, Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen. S. 388.

Besprechungen:

F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. S. 392.

Berichtigung. S. 392.

Personalien. S. 392.

Gesuche. S. 392.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Messung von Tourenzahlen mit Hilfe stroboskopischer Erscheinungen im Wechselstrombogenlicht.

Von Dr. Erich Günther.

Bei physikalischen und technischen Untersuchungen ergibt sich gelegentlich die Aufgabe, die Tourenzahl irgendeines rotierenden Gebildes, z. B. des Ankers eines Elektromotors, einer Registriertrommel oder -scheibe während einer längeren Zeit möglichst konstant zu erhalten, diese Konstanz dauernd zu kontrollieren und die Tourenzahl zu messen. Strebt man dabei eine größere Genauigkeit an, so ist der gewöhnliche technische Tourenzähler wenig geeignet. Ein sehr bequemes und recht genaues Hilfsmittel bilden dagegen stroboskopische Erscheinungen, wie man sie im Lichte einer Wechselstrombogenlampe beobachten kann. Beleuchtet man nämlich eine rasch rotierende weiße Scheibe, auf die in gleichen Winkelabständen schwarze Sektorstreifen aufgemalt sind, mit der Wechselstrombogenlampe, so erscheint bei bestimmter Tourenzahl der durch die Sektoren gebildete Stern dunkel auf hellem Grunde stroboskopisch ruhig stehend. Das tritt dann ein, wenn sich die Scheibe während einer Halbschwingung des Wechselstromes, also von einem Helligkeitsmaximum der Lampe bis zum nächsten, gerade um den Winkelabstand zweier Sektoren, weiter gedreht hat.

Ist die Frequenz des Wechselstromes $\frac{m}{2}$, die Anzahl der Helligkeitsmaxima der Lampe während einer Sekunde also m, die Tourenzahl des Motors pro sec. n, die Anzahl der Sektoren auf der Scheibe a, so erscheint der ruhig stehende stroboskopische Stern mit a-Strahlen, wenn

$$n = k \cdot \frac{m}{a},$$

wobei $k = 1, 2, 3 \ldots$ gesetzt werden kann; denn die Erscheinung wiederholt sich, wenn sich die Scheibe in 1/m sec. nicht nur um den einfachen, sondern um den zwei-, drei-, k-fachen Winkelabstand zweier Sektoren weiter dreht. Da aber die wirksame Lichtaussendung der Bogenlampe nicht momentan, sondern während einer gewissen Zeit erfolgt und die Scheibe sich in dieser Zeit um so weiter dreht, je größer ihre Tourenzahl ist, so erscheinen die stroboskopischen Sterne mit um so breiteren, verwascheneren Strahlen, je höher ihre Ordnung k ist. Beträgt die Tourenzahl nur die Hälfte, ein Drittel, ein Viertel von $\frac{m}{a}$, wird also $n = \frac{m}{k' \cdot a}$ (wobei wiederum $k' = 1, 2, 3 \ldots$ sein kann), so erscheint ein stroboskopischer Stern mit $k' \cdot a$-Strahlen. Auch hier erhält man durch Multiplikation mit k, also für $n = k \cdot \frac{m}{k' a}$, Sterne höherer Ordnung; haben aber k und k' einen gemeinsamen Teiler, so ist $\frac{k}{k'}$ mit diesem zu kürzen, und erst dann gibt der Nenner des Ausdrucks für n die Anzahl der Strahlen des stroboskopischen Sternes an. Am schärfsten erscheint aber immer der Hauptstern, für den $n_0 = \frac{m}{a}$ ist. Bei einer Tourenzahl n, die nicht sehr von n_0 verschieden ist, steht der stroboskopische Stern nicht mehr ruhig, sondern er rotiert ebenfalls langsam, und zwar für $n > n_0$ im gleichen Sinne, für $n < n_0$ im entgegengesetzten Sinne wie die Scheibe. Ist N die

Tourenzahl des stroboskopischen Sternes, so ist:

$$N = n - n_0.$$

Aus dem Vorzeichen von N ergibt sich der Drehsinn des stroboskopischen Sternes. Die nahe Verwandtschaft der geschilderten Erscheinungen mit den akustischen Schwebungsvorgängen wird an der Hand dieser Formel klar.

Die Verwendung der Erscheinungen zum eingangs erwähnten Zwecke ergibt sich nun ohne weiteres: Mit Hilfe des ruhig stehenden stroboskopischen Sternes kann man die Konstanz der Tourenzahl während beliebig langer Zeiten optisch sehr genau kontrollieren und bei eintretenden Veränderungen notwendig werdende Einregulierung bequem vornehmen.

Die Tourenzahl selbst bestimmt man gleichzeitig ebenfalls recht genau nach der Formel $n_0 = \frac{m}{a}$. Da m gewöhnlich fest gegeben sein wird und a eine ganze Zahl sein muß, ist man allerdings an eine Reihe bestimmter Tourenzahlen gebunden. So ergibt sich für $m = 100$ und

$a =$	25	20	16	12	10	8	6	5	4	2
$n_0 =$	4	5	$6^1/_4$	$8^1/_3$	10	$12^1/_2$	$16^2/_3$	20	25	50 pro sec

Für ein beliebiges n, das nicht größer als 20 sein möchte, läßt sich die Messung an die Formel

$$N = n - n_0$$

anknüpfen; aus dieser ergibt sich

$$n = \frac{m}{a} + N$$

je nach dem Drehsinn des rotierenden stroboskopischen Sternes. Man bestimmt dann die Tourenzahl N mit der Stoppuhr, indem man entweder einen bestimmten Strahl des Sternes beim Umlauf verfolgt und sein Passieren bei einer festen Marke beobachtet, oder indem man die in einer gemessenen Zeit bei einer festen Marke passierenden Strahlen des rotierenden Sternes abzählt und die gefundene Zahl durch a dividiert, wodurch sich die Anzahl der Umläufe des Sternes in der fraglichen Zeit ergibt.

Grundlegend für das ganze Verfahren ist natürlich die Kenntnis und die Konstanz der Zahl m; entnimmt man den Wechselstrom einem großen Netz, also einer schweren Maschine, so kann man sich auf die Konstanz von m recht gut verlassen; empfehlenswert bleibt die Kontrolle mit Hilfe eines Wechselstromresonanzfrequenzmessers. Dann läßt die Methode sicher eine Genauigkeit von mindestens $^1/_4$ Proz. zu.

Um bequem arbeiten zu können, hält man sich eine Reihe von Kartonscheiben mit verschiedenen Sektorteilungen a, die leicht auswechselbar auf der rotierenden Achse befestigt werden können, vorrätig; man nimmt die schwarzen Sektoren nicht zu breit, gibt ihnen etwa $^1/_4$ der Breite der weiß bleibenden Sektoren. Besonders praktisch ist die Verwendung von Scheiben, bei denen sich die Sektoren nicht vom Mittelpunkt bis zum Rand erstrecken, sondern bei denen durch konzentrische Kreise eine Anzahl ringförmiger Abteilungen gebildet ist, deren jede eine besondere Teilung trägt. Man erhält dann mit einer Scheibe eine ganze Reihe von Tourenzahlen. Da es hier vorkommen kann, daß zwei benachbarte stroboskopische Sterne im entgegengesetzten Sinne rotieren, kann man die Tourenzahlbestimmung nach der Formel

$$n = \frac{m}{a} + N$$

noch dadurch verbessern, daß zwei Beobachter gleichzeitig die Zahlen N und N_1 für die benachbarten Sterne mit den Teilungszahlen a und a_1 messen.

Zur Herstellung der Erscheinung verwendet man eine nicht zu kräftige Bogenlampe, damit die Helligkeitsmaxima gut hervortreten; zur Not kann man auch schon eine Glühlampe benutzen.

Besonders empfehlenswert scheint mir die Methode dann zu sein, wenn gleichzeitig eine größere Anzahl von Beobachtern den Vorgang verfolgen soll, also bei Vorlesungs- und Unterrichtsversuchen. An anderer Stelle[1]) habe ich eine ganze Reihe von solchen Versuchen beschrieben, bei denen die Anwendung der Methode lohnend ist.

1) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **34**, Heft 3, 1921.

(Eingegangen 18. Mai 1921.)

Über die Dichte von Packungen und die Fallgeschwindigkeit von Lykopodium.

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

Von Alfred Ilgner.

Vorbemerkung: Im Jahrgang XI, 1910 S. 78 dieser Zeitschrift geben Keehan und Zeleny einen Bericht über ihre Versuche über die Fallgeschwindigkeit kleiner Körper in Luft und vergleichen die experimentell gefundenen Zahlen mit den theoretischen Werten, die sich aus der Stokesschen Formel errechnen lassen. Sie kommen zu folgendem

Ergebnis: „Die mittlere Größe, Dichte und Endgeschwindigkeit des Falles in Luft der annähernd kugelförmigen Teilchen von Lykopodium, Lykoperdon und Polytrichum wurden experimentell gewonnen. Die beobachteten Werte der Endgeschwindigkeit waren viel kleiner als die entsprechenden nach der Stokesschen Formel berechneten Werte. — Ähnliche mit künstlichen Kugeln aus einem schwarzen Wachs, aus Quecksilber oder Paraffin angestellte Versuche lieferten innerhalb weiter Grenzen für die Kugelgröße für die Endgeschwindigkeit Werte, die gut mit der theoretischen Formel übereinstimmten und somit deren Gültigkeit unter den angewandten Versuchsbedingungen bewiesen. — Irgendwelche befriedigende Erklärung für die Unstimmigkeit bei den Versuchen mit Sporen ist nicht ersichtlich. Vielleicht wird eine turbulente Bewegung des Fluidums durch einen nahezu kugelförmigen Körper leichter erregt als durch einen solchen, der vollkommen kugelförmig ist."

Diese Feststellungen von Keehan und Zeleny gaben die Anregung zu den Versuchen, über die im folgenden berichtet werden soll; — ihr Ziel war es, für Lykopodium die Abweichung zwischen den theoretischen und den gemessenen Werten aufzuklären.

Die Versuche von Keehan und Zeleny sind mit solcher Sorgfalt und mit so feinen Hilfsmitteln ausgeführt, daß an der Richtigkeit der gemessenen Zahlen kaum zu zweifeln ist. Um sicher zu sein, führte ich noch einmal Bestimmungen des Durchmessers der Lykopodiumteilchen und ihrer Dichte aus, — sie führten zu Werten, die den von Keehan und Zeleny angegebenen sehr nahe lagen (die Verschiedenheit des benutzten Materials mag diese ganz geringe Abweichung erklären) und die, in die Stokessche Formel eingesetzt, zu demselben Fehlergebnis führten. Der Fehler mußte also an einer anderen Stelle liegen. — Es wurde nun folgender Gedankengang einer experimentellen Prüfung unterzogen. Etwaige Unebenheiten der Oberfläche der Sporen müssen für die Reibung beim Fall in Luft das Volumen größer machen als es für die Dichtigkeitsbestimmungen ist; das gleiche vergrößerte Volumen mußte aber auch für das Ergebnis von Packungsversuchen maßgebend sein. Es wurde also die Frage nach der Dichte von Packungen kugelförmiger Körper herangezogen und durch Versuche geprüft. So gelang es, für die Lykopodiumteile eine scheinbare Dichte und einen scheinbaren Radius zu bestimmen, der, in geeigneter Weise in die Stokessche Formel eingesetzt, für die Endgeschwindigkeit einen Wert lieferte, der dem von Keehan und Zeleny gemessenen ziemlich nahe kam (2,04 gegen 1,76). Er wurde außerdem noch durch eigene Versuche geprüft und bestätigt (2,03 gegen 2,04).

I. Über die Dichte von Packungen kugelförmiger Körper.

§ 1. Wenn man eine Anzahl von Kugeln in ein Gefäß schüttet, so ist nur ein Teil des Gesamtvolumens von der eingebrachten Materie ausgefüllt. Ein mehr oder weniger großer Raum wird von der Luft eingenommen, die zwischen den Kugeln Platz findet. Im folgenden soll unter dem „Porenvolumen" solcher „Packung" die darin enthaltene Luftmenge verstanden werden, ausgedrückt in Bruchteilen des von der Packung insgesamt eingenommenen Raumes. Dieses Porenvolumen hängt ab von der Größe der Kugeln, von der Form des Gefäßes und von seiner Größe. Je nach dem Charakter der Füllung lassen sich zudem mehrere Arten von Packungen unterscheiden, die folgendermaßen bezeichnet werden sollen:

Einfache Packungen: Solche aus nur jeweilen gleich großen Kugeln.
1. Ordnung: Solche, bei denen die Elemente der Packung die Kugeln selbst sind.
2. Ordnung: Solche, bei denen als Elemente der Packung Aggregate von Kugeln auftreten (Krümel).
Gemischte Packungen: Solche aus Kugeln verschiedener Größe.

Die gemischten Packungen haben für die vorliegenden Untersuchungen kein Interesse; auf sie wird daher nicht näher eingegangen werden.

§ 2. Für die einfachen Packungen 1. Ordnung lassen sich für das Porenvolumen sofort obere und untere Grenzen errechnen. Die weiteste Packung erhält man, wenn man um jede Kugel den umschriebenen Würfel gelegt und diese Würfel dann so aufgeschichtet denkt, daß sie den ganzen Raum lückenlos erfüllen. Das Porenvolumen der ganzen Packung ist dann dasselbe wie innerhalb jeden Würfels, d. h. in sofort verständlicher Bezeichnung $\frac{W-K}{W}$; dies ergibt 47,64 Proz. Luft (unabhängig von der Kugelgröße!)

Die engste Packung erhält man, wenn man die Kugeln nicht in Würfel, sondern in

Pentagondodekaeder legt. Aus dem Kugelradius lassen sich Seitenkante und Inhalt des Dodekaeders berechnen und daraus das Luftvolumen zu 24,51 Proz.

Ein mittlerer Wert läßt sich ebenfalls sofort angeben: Man lagert die Kugeln so, daß die Mittelpunkte je 4 benachbarter Kugeln ein reguläres Tetraeder bilden und denkt aus der ganzen Packung das kleinste Parallelepiped herausgeschnitten, das sich durch 8 Kugelmittelpunkte legen läßt. Die 8 Kugelsektoren, die in diesem liegen, bilden zusammen genau eine Kugel. Die Grundfläche und Höhe des Parallelflächners lassen sich leicht finden, und so erhält man für die Packung des Porenvolumen 25,952. (Die ausgeführten Rechnungen findet man u. a. bei Mitscherlich: „Bodenkunde für Land- und Forstleute." Berlin 1905, S. 79ff. Lang: Forschungen der Agrikulturphysik I, 122.)

Es enthält also die

engste	Packung	$E = 24{,}51$	Proz. Luft.
mittlere	„	$M = 25{,}952$	
weiteste	„	$W = 47{,}64$	

§ 3. Nicht viel schwieriger wird die Rechnung für einfache Packungen 2. Ordnung — die in der Mineralogie unter dem Namen „Krümelstruktur" bekannt sind. Man erhält sie, wenn man eine Packung bildet, nicht aus einzelnen Kugeln, sondern aus Aggregaten, deren jedes selbst wieder eine Packung darstellt (natürlich beide Male eine Packung 1. Ordnung). Das Porenvolumen dieser Krümelpaekung ist sofort auszurechnen, doch hat man dabei 9 Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob innerhalb der Krümel die Packung E, M oder W auftritt, — und die Krümel als solche in E, M, W gepackt sind. Diese 9 Arten werden durch Doppelsymbole bezeichnet werden, deren erster Buchstabe die Packung der Krümel, deren zweiter die Packung in den Krümeln angibt. — Der erste Fall (EE) mag durchgerechnet werden — die Werte für die anderen 8 sind ganz entsprechend zu erhalten. Die so gewonnenen Zahlen gelten jedoch nur mit mehr oder weniger großer Annäherung, da bei der Rechnung stillschweigend vorausgesetzt wird, daß die Krümel auch wieder Kugelgestalt haben. Zwischen den Krümeln ist, wenn diese in Packung E liegen, 24,51 Proz. Luft. Also sind von je 100 Raumteilen der ganzen Packung 75,49 Teile von den Krümeln selbst ausgefüllt. Wenn nun diese selbst auch wieder Packungen der Sorte E sind, so ist in ihnen wieder 24,51 Proz. Luft. Insgesamt beträgt das Luftvolumen also

$$24{,}51 + \frac{24{,}51 \cdot 75{,}49}{100} = 43{,}01 \text{ Proz.}$$

Für die 9 Packungen erhält man so folgende Werte:

Die Krümel liegen in Packung	In den Krümeln ist die Packung		
	E	M	W
E	$EE = 43{,}01$	$EM = 44{,}11$	$EW = 60{,}47$
M	$ME = 44{,}102$	$MM = 45{,}182$	$MW = 61{,}242$
W	$WE = 60{,}47$	$WM = 61{,}23$	$WW = 72{,}57$

§ 4. Diese theoretischen Werte sind alle unabhängig von der Kugelgröße, — solange man den Raum, den die ganze Packung einnimmt, unbegrenzt läßt. Dies ändert sich aber sofort, wenn man die Kugeln in Gefäße packt, da dann noch Luftmengen zwischen der Gefäßwand und den äußeren Kugeln hinzukommen, — Luftmengen, die von der Gefäßform und -größe und von der Kugelgröße stark beeinflußt werden. Diese mehrfache Abhängigkeit wurde durch eine sehr große Anzahl von Messungen ermittelt. Es wurden dabei Stahlkugeln von 11,92 und 6,35 mm Durchmesser und Bleikugeln (Schrot) in 6 verschiedenen Größen, von 5 bis 1,25 mm Durchmesser verwendet. Mit jeder einzelnen dieser Kugelsorten wurden Packungsversuche in Gefäßen von verschiedener Form und Größe ausgeführt, in würfelförmigen, prismatischen, tetraedrischen, zylindrischen und kugelförmigen Gefäßen, deren Inhalt bei den kugelförmigen Gefäßen (Tarierfläschchen) bis zu 200 cm³, bei den zylindrischen bis zu 265 cm³ betrug.

Auf nähere Einzelheiten soll hier in diesem Zusammenhang — da die Packungstheorie hier nur als Mittel zum Zweck dient — nicht eingegangen werden. Es ergab sich im wesentlichen folgendes:

1. Das Luftvolumen fällt im allgemeinen mit der Kugelgröße (da bei kleineren Kugeln die Räume zwischen Wand und Kugeln sehr gering werden).

2. Das Porenvolumen hängt sehr stark ab von der Gefäßform. Am engsten werden die Packungen in Gefäßen mit runden Seitenwänden (Zylindern) und in Kugeln. Bei diesen wurde das Minimum des Luftvolumens erreicht.

3. Das Porenvolumen sinkt (bei gleichbleibender Gefäßform) mit wachsender Gefäßgröße.

4. Das Porenvolumen sinkt, wenn die Packung Erschütterungen ausgesetzt wird, nähert sich jedoch sehr schnell asymptotisch einem konstanten Wert.

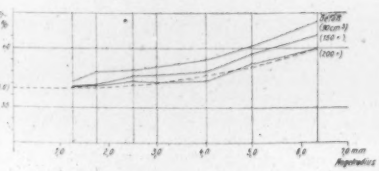
5. Trägt man das Porenvolumen als Ordinate, die Kugelgröße als Abszisse in

einem Koordinatensystem auf, so zeigen die Kurven keinen gleichmäßigen Abfall, sondern schwanken sehr stark. Nur bei kugelförmigen Gefäßen (ohne Hals) erhält man annähernd monoton fallende Kurven.

6. Es treten nie reine Packungen erster Ordnung auf! Die Zahlen und der Anblick der Packungen lehren, daß stets Unregelmäßigkeiten in der Lagerung der Teilchen vorkommen. Sämtliche gewonnnene Porenvolumen liegen zwischen 33,5 und 42,5 Proz. Sie liegen also wesentlich näher an dem Wert der weitesten Packung 1. Ordnung oder an den unteren Werten der Packungen 2. Ordnung, die gewissermaßen als vereinfachtes Symbol der auftretenden Unregelmäßigkeiten genommen werden können.

7. Vergrößert man die Reibung innerhalb der Packung (z. B. dadurch, daß man die Kugeln mit einem dünnen Schellacküberzug versieht, der sie leicht klebrig macht), so steigt das Luftvolumen.

8. Für den vorliegenden Fall — die Anwendung auf Lykopodium — mußte festgestellt werden, welchem Grenzwerte sich das Porenvolumen nähert, wenn der Kugelradius immer kleiner wird. Da es nicht möglich war, Kugeln zu bekommen, die auch nur annähernd so klein waren wie die Lykopodiumsporen, um mit diesen die Packungsdichte zu untersuchen, wurden die aus den Messungen mit größeren Kugeln gefundenen Kurven zeichnerisch auf kleine Werte des Radius extrapoliert. Fig. 1 zeigt die zu diesem Zwecke



benutzten Kurven, die aus Messungen mit der kleineren Stahlkugelsorte und den verschiedenen Schrotsorten in Tarierfläschchen von 90, 150 und 200 cm³ Inhalt gewonnen wurden, und die deutlich erkennen lassen, daß das Porenvolumen sich wirklich einem Grenzwerte nähert. Die für die Extrapolation günstigste Kurve ist die des größten Gefäßes. Gleicht man hier die Unebenheiten aus (durch die gestrichelte Linie — — — —), so erhält man eine Annäherungskurve, die sich asymptotisch einer Parallelen zur Abszissenachse nähert und die Ordinatenachse im Punkte 36,6 schneidet. D. h. also, in einer Packung von ganz kleinen Kugeln mußte das Porenvolumen 36,6 Proz. betragen.

II. Über die Fallgeschwindigkeit von Lykopodium.

§ 5. Durch mikroskopische Messung der trockenen Lykopodiumsporen erhielt ich für den Radius der annähernd kugelförmigen Teilchen im Mittel den Wert $r_a = 1{,}585 \cdot 10^{-3}$ cm. Ich führe zum Vergleich an, daß Keehan und Zeleny $1{,}58 \cdot 10^{-3}$ cm als den mikroskopisch gemessenen Radius angeben. R. Mecke[1]) hat in seiner Marburger Dissertation etwas kleinere Werte als Ergebnis seiner Messungen mitgeteilt: $1{,}53 \cdot 10^{-3}$ cm aus mikroskopischen Messungen, 1,518 im Mittel aus der Messung der von Lykopodiumsporen erzeugten Beugungsringe. Bringt man die Sporen in eine Flüssigkeit (Alkohol, Äther, Petroleum oder auch Wasser, in das sie jedoch nur mit großer Mühe einzubetten sind), so sieht man den Rand mit einem Kranz von kleinen Zacken umgeben. Nach der Beschreibung in botanischen Lehrbüchern ist die Oberfläche der Lykopodiumsporen mit einem netzförmigen System von Leisten überzogen. In trockenem Zustande treten diese Leisten am Rande nicht so deutlich in die Erscheinung; der Radius, den man in diesem Zustande mißt, ist daher der „äußere Radius" r_a, d. h. der Radius des die Leisten einschließenden Volumens. In der Flüssigkeit treten die Leisten sehr deutlich hervor, und man ist nun imstande, auch den Radius des eigentlichen Sporenkerns, des inneren Volumens, r_i zu messen. Ich fand ihn im Mittel zu $1{,}376 \cdot 10^{-3}$ cm.

§ 6. Die Dichte des Lykopodiums wurde bestimmt mit einem empfindlichen Volumenometer nach Regnault, — und durch Einschmelzen in Vaseline nach dem Verfahren von W. F. Smeeth[2]). Bei der ersten Methode wurden Mengen benutzt, die zwischen 40 und 70 g schwankten. Die für die Dichte gefundenen Werte stimmten ziemlich gut überein (z. B. 1,053, 1,064, 1,118, ...) — ihr Mittel war $\sigma_1 = 1{,}111$ gcm^{-3}. — Bei der Einschmelzmethode wurde folgendermaßen verfahren: Es wurde ein Glasschälchen mit Vaseline gefüllt, ein Glasstab mit eingeschmolzen und das Ganze gewogen. Das Gewicht in Luft ist P_1, in Wasser P. Also das Volumen der gefüllten Schale $V_1 = P_1 - P$. Dann wurde Lykopodium auf die Vaseline geschüttet und das Ganze wieder in Luft gewogen (P_2). Also ist das Gewicht des Lykopodiums $P_2 - P_1$. Darauf wurde die

1) R. Mecke, Ann. d. Phys. **61**, 498, 1920.
2) W. F. Smeeth, Proc. Dubl. Soc. **6**, 61—62, 1888.

Vaseline zum Schmelzen gebracht und das Lykopodium mit dem Glasstabe darunter gerührt, wobei jeder Verlust auf das sorgfältigste vermieden wurde. Nach dem Erstarren ergab eine erneute Wägung unter Wasser das Gewicht P_3. Demnach ist das Volumen des Lykopodiums und der Schale $V_2 = P_2 - P_3$ und das Volumen des Lykopodiums allein $V_2 - V_1$. Daraus erhält man die Dichte zu

$$\sigma = \frac{P_2 - P_1}{V_2 - V_1}.$$

Die so gefundenen Zahlen stimmten wieder gut miteinander und auch ziemlich gut mit den Volumenometer-Messungen überein. Einige Werte aus der sehr großen Zahl von Messungen bringt die folgende Tabelle:

P_1	P	V_1	P_2	P_3	V_2	$V_2 - V_1$	$P_2 - P_1$	σ
10,5858	3,9136	6,6722	11,5394	3,9854	7,5540	0,8818	0,9536	1,081
11,5210	3,9854	7,5356	13,0411	4,1219	8,9192	1,3736	1,5201	1,106
11,0734	3,8142	7,8592	12,9541	3,9275	9,0266	1,1674	1,2807	1,097
12,9346	3,9275	9,0071	13,9495	4,0135	9,9360	0,9289	1,0144	1,092

Das Gesamtmittel war hier $\sigma_2 = 1{,}093\ \mathrm{gcm^{-3}}$, bei den Volumenometer-Messungen . . . . $\sigma_1 = 1{,}111$ „ also die Dichte $\sigma = 1{,}102\ \mathrm{gcm^{-3}}$.

Keehan und Zeleny haben aus Volumenometer-Messungen den ein wenig höheren Wert der Dichte 1,175 gefunden, dagegen nach der Schwebemethode in Salzlösungen 1,13 und 1,09, also im ganzen Werte, die mit den meinigen in guter Übereinstimmung stehen. Die geringen Abweichungen spielen für das hier vorliegende Problem gar keine Rolle, denn Keehan und Zeleny berechnen aus den von ihnen gefundenen Werten des Radius und der Dichte die Endgeschwindigkeit des Falles der Lykopodiumsporen in der Luft zu 3,14 $\mathrm{cm \cdot sec^{-1}}$, während der experimentell gefundene Wert nur 1,76 betrug. Sollte sich diese Abweichung aus einer unrichtigen Bestimmung der Dichtigkeit erklären, so müßte die Dichtigkeit zu 0,61 angesetzt werden, ein Wert, der nur halb so groß wie die wirklich gemessenen Werte wäre. Diese Annahme ist ohne Frage unmöglich.

§ 7. Um hier weitere Aufschlüsse zu erhalten, wurden die Ergebnisse der Packungsversuche benutzt. Die Lykopodiummenge, die 100 $\mathrm{cm^3}$ erfüllte, wurde zu 44,03 g gemessen. Da nach § 5 in einer Packung so kleiner Kugeln 36,6 Proz. Luft enthalten sein muß, so würden danach 44,03 g Lykopodium den Raum von 63,4 $\mathrm{cm^3}$ einnehmen. Das ergibt eine scheinbare Dichte $\sigma_s = 0{,}695$. Also führen die Packungsversuche zu einem ebenso unrichtigen Wert der Dichte wie die Fallversuche. Aus der wahren Dichte 1,102 würde folgen, daß 44,03 g Lykopodium einen Raum von 40 $\mathrm{cm^3}$ einnehmen, die Lykopodiumpackung also nicht 36,6, sondern 60 Proz. Luft enthält. Die Abweichung erklärt sich durch die Vorstellung, daß die Lykopodiumsporen sich nicht mit ihren inneren Radien r_i, sondern mit ihren äußeren Radien r_a aneinander legen. Die Berechnung ist dann nur insofern ungenau, als der ganze Zwischenraum zwischen der äußeren und der inneren Kugelfläche als Luft gerechnet, Volumen und Masse der „Leisten" also vernachlässigt wird. Aus der wahren Dichte 1,102 und dem inneren Radius r_i folgt unter der gleichen Vernachlässigung das Gewicht eines einzelnen Teilchens $P = 1{,}2026 \cdot 10^{-8}$ g. Daraus läßt sich weiter errechnen, daß in 1 $\mathrm{cm^3}$ 36,6 Millionen Sporen enthalten sind. T. E. Wallis gibt an, daß 1 mg Lykopodium 94 000 Sporen enthält; daraus würde sich P zu $1{,}064 \cdot 10^{-8}$ g ergeben[1]). Geht man endlich mit der scheinbaren Dichte 0,695 in das Gewicht P des einzelnen Teilchens hinein, so erhält man einen scheinbaren Radius r_s nach der Formel

$$r_s = \sqrt[3]{3P/4\pi\sigma_s}$$

und findet

$$r_s = 1{,}605 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{cm},$$

also einen Wert, der wieder sehr nahe gleich dem mikroskopisch gemessenen Werte des äußeren Radius r_a, d. h. $= 1{,}585 \cdot 10^{-3}$ cm ist.

§ 8. Mit diesen scheinbaren Werten kommt man nun sofort zum Ziel. — Die Stokessche Formel lautet:

$$V = \frac{2g}{9\eta} r^2 (\sigma - \varrho), \qquad (1)$$

wobei

η der Reibungskoeffizient der Luft,
ϱ ihre Dichte,
σ die Dichte des fallenden Körpers,
r sein Radius,
V seine Endgeschwindigkeit ist.

Die Formel beruht auf der Gleichsetzung des Gewichts mit dem Reibungswiderstand, den

1) T. E. Wallis, Journal of the R. Microscopical Soc. 1920. Part. 2. June. S. 169—178.

Stokes zu $6r\pi\eta V$ ansetzt. Ausführlich geschrieben lautet sie also:

$$6r\pi\eta V = \tfrac{4}{3}r^3\pi(\sigma - \varrho)g. \qquad (2)$$

Auf der linken Seite steht der Reibungswiderstand. Hat der Körper nun durch das Leistennetz auf seiner Oberfläche ein vergrößertes Volumen, so wird dies den Reibungswiderstand beeinflussen und auch nur diesen. Also schreiben wir die Formel in der Gestalt:

$$6r_a\pi\eta V = \tfrac{4}{3}r^3\pi(\sigma - \varrho)g. \qquad (3)$$

Die Rechnung ergibt aus dieser Formel dann

$$V = 2{,}04\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-1}.$$

Dieser Wert liegt dem von Keehan und Zeleny gemessenen (1,76) verhältnismäßig nahe und wurde experimentell geprüft und bestätigt.

§ 9. Es wurde ein Apparat benutzt, der im Prinzip dem von Keehan und Zeleny gebauten ähnlich, jedoch sehr viel weniger kompliziert war. Die Fallstrecke betrug 104 cm, die zugehörigen Fallzeiten wurden mit der Stoppuhr gemessen. Die Beobachtung war sehr schwierig, und die beobachteten Zeiten schwankten demgemäß ziemlich stark (von 49,0—53,4 sec). Das Mittel aus allen Zeiten war

$$T = 51{,}15\ \text{sec};$$

und somit ergab sich für die Endgeschwindigkeit

$$V = 2{,}03\ \text{cm}\cdot\text{sec}^{-1},$$

— ein Wert, der mit dem theoretischen (2,04) bestens übereinstimmt. —

Versuche über die Fallgeschwindigkeit in Alkohol fielen weniger genau aus, was wohl in der Hauptsache daran liegen mag, daß es kaum möglich war, einzelne Lykopodiumteilchen zum Fallen zu bringen. Sowie die Sporen auf die Oberfläche des Alkohols fallen, ballen sie sich zu Komplexen zusammen, die für die Versuche natürlich nicht zu brauchen sind. — Die außerordentlich schwierigen Messungen ergaben für V_a den Wert 0,0077, während der theoretisch errechnete 0,0089 $\text{cm}\cdot\text{sec}^{-1}$ betrug.

Zusammenfassung.

Die von Keehan und Zeleny gefundene Abweichung der Fallgeschwindigkeit von Lykopodiumsporen von dem nach der Stokesschen Formel berechneten Werte wird durch die Vorstellung erklärt, daß die Lykopodiumsporen infolge des ihre Oberfläche bedeckenden Netzes von feinen Leisten bei ihrer Bewegung ein größeres Luftvolumen mitschleppen, als sie durch ihre Masse verdrängen. Diese Auffassung findet ihre Bestätigung in Versuchen über die Dichtigkeit von Packungen, die ebenfalls für die Lykopodiumsporen ein viel zu großes Volumen und entsprechend eine viel zu kleine Dichte ergeben. Setzt man in die Stokessche Formel den scheinbaren äußeren Radius der Sporen in das Reibungsglied ein, in das Gewichtsglied dagegen die wahre Dichte und den inneren Radius, so erhält man die richtigen Werte der Fallgeschwindigkeit.

Gießen, Mai 1921.

(Eingegangen 23. Mai 1921.)

Einsteinsche Lichtquanten und räumliche Struktur der Strahlung.

Von M. Wolfke.

Trotz der beispiellosen Entwickelung der Quantentheorie im letzten Jahrzehnt sind wir der prinzipiellen Frage nach dem Wesen der Quanten selbst nicht viel näher getreten. Wir wissen zwar, daß das Wesen der Quantentheorie in einer Diskontinuität der Naturvorgänge, speziell in den molekularen und intramolekularen Gebieten zu suchen ist, darüber jedoch, wo man diese Diskontinuität einführen und wie man sie physikalisch deuten soll, haben wir trotz der vielen Quantenansätze bis heute noch wenig Positives und Befriedigendes erfahren. Daher kann jeder Hinweis auf verborgene Beziehungen in dem System der Quantenformeln und jede physikalische Deutung solcher Beziehungen einen heuristischen Wert haben. In diesem Sinne soll hier, im Anschluß an die Einsteinschen Lichtquanten, die räumliche Struktur der Hohlraumstrahlung näher untersucht werden.

Bekanntlich vertritt Einstein in der Quantentheorie der Strahlung seit jeher einen extremen Standpunkt. Einstein[1]) postuliert die Diskontinuität nicht nur allein für die Wechselwirkung zwischen der Materie und dem Strahlungsfeld, sondern er nimmt an, daß auch im Strahlungsfeld selbst die Energie an diskrete Zentren, die sogenannten Lichtquanten, gebunden ist. Die Gründe, welche Einstein für diese Auffassung anführt, sind so überzeugend, daß man die Lichtquanten trotz der schwerwiegenden Einwände, die sich aus der klassischen Optik ihnen entgegenstellen, doch nicht ohne weiteres verwerfen kann. Diese Gründe als auch die Einwände sind so bekannt, daß ich hier darauf nicht näher eingehen werde.

Betrachtet man die Hohlraumstrahlung vom

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **17**, 132, 1905; diese Zeitschr. **10**, 185 u. 817, 1909; Verhandl. d. D. Phys. Ges. **18**, 318, 1916; diese Zeitschr. **18**, 121, 1917.

Standpunkt der Lichtquantenhypothese aus, so ergibt sich nach Einstein[1], daß sich die Strahlung bei geringen Strahlungsdichten, d. h. im Gültigkeitsbereich der Wienschen Strahlungsformel so verhält, als ob sie aus diskreten räumlich voneinander unabhängigen Quanten $h\nu$ bestehen würde. Auch bei größeren Strahlungsdichten machen sich die Quanten bemerkbar. Wie Debye[2] bewiesen hat, genügt schon allein die Annahme, daß die Strahlungsenergie in Quanten $h\nu$ über die Eigenschwingungen des Hohlraumes verteilt ist, um zu dem Planckschen Strahlungsgesetz zu gelangen. Auch ich[3] habe das Plancksche Strahlungsgesetz allein unter der Voraussetzung, daß die Strahlungsenergie über diskrete Lichtatome verteilt ist, erhalten. Im Anschluß daran sprach ich[4] ehemals den Gedanken aus, daß sich die bei großen Strahlungsdichten anfänglich kontinuierliche Strahlung mit zunehmender Verdünnung in Quanten auflöst. Dieser Gedanke wurde dann noch deutlicher in der Polemik[5] zwischen Krutkow und mir hervorgehoben. Es zeigte sich, daß die Einsteinschen Lichtquanten, die im Gültigkeitsbereich der Wienschen Strahlungsformel räumlich voneinander unabhängig sind, diese räumliche Unabhängigkeit bei größeren Strahlungsdichten verlieren. Bis jetzt wurde jedoch noch nicht explizite untersucht, in welchen räumlichen Beziehungen bei großen Strahlungsdichten die Einsteinschen Lichtquanten zueinander stehen. Hier soll nun in ähnlicher Weise, wie Einstein[6] seinerzeit die räumliche Unabhängigkeit der Lichtquanten aus der Wienschen Strahlungsformel folgerte, die räumlichen Beziehungen dieser Lichtquanten zueinander aus dem Planckschen Strahlungsgesetz abgeleitet werden.

1. Teilstrahlungen der Hohlraumstrahlung.

Vor allem werden wir beweisen, daß die schwarze Strahlung aus einer Reihe von, nach Art der Wienschen Strahlungsformel zusammengesetzten, voneinander thermodynamisch unabhängigen Teilstrahlungen besteht.

Der Plancksche Ausdruck für die Strahlungsdichte u der schwarzen Strahlung läßt sich bekanntlich in einer Reihe entwickeln:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} u_i, \qquad (1)$$

deren i-tes Glied:

$$u_i = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \qquad (2)$$

ist. Wir sehen, daß die einzelnen Glieder dieser Reihe nach Art der Wienschen Strahlungsformel gebaut sind.

Wenn diese Teilstrahlungen u_i der schwarzen Strahlung tatsächlich Strahlungsenergien repräsentieren, die thermodynamisch voneinander unabhängig sind, so muß die Summe aller Entropiedichten s_i der Teilstrahlungen gleich der Entropiedichte s der gesamten Hohlraumstrahlung sein, also:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} s_i = s. \qquad (3)$$

Es läßt sich dann leicht beweisen, daß, bei Erfüllung der obigen Bedingung, für jede dieser Teilstrahlungen der schwarzen Strahlung die Beziehung:

$$\frac{\partial s_i}{\partial u_i} = \frac{1}{T} \qquad (4)$$

gilt[1].

Zu diesem Zwecke betrachten wir einen Hohlraum vom Volumen V mit der Strahlungsenergie U und der Entropie S. Auf Grund der Reihe (1) und der Gleichung (3) lassen sich die Größen U und S durch folgende Summen der Integrale darstellen:

$$U = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty u_i \, d\nu;$$

$$S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty s_i \, d\nu.$$

Falls sich die Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, also für die schwarze Strahlung, muß die Variation der Entropie δS, bei konstantem Volumen und konstanter Strahlungsenergie, für alle möglichen Energieverteilungen über die einzelnen Teilstrahlungen und Frequenzen, verschwinden. Wir erhalten folgende Bedingungsgleichungen:

$$\delta V = 0; \quad \delta U = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta u_i \, d\nu = 0; \qquad (5)$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c., § 5.
2) P. Debye, Ann. d. Phys. (4) **33**, 1427, 1910.
3) M. Wolfke, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **15**, 1123 u. 1215, 1913.
4) M. Wolfke, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **16**, 4, 1914.
5) Diese Zeitschr. **15**, 133, 308, 363 u. 463, 1914.
6) A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c.

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 2. Aufl. 1913. § 91, 92, 93, S. 87—89.

und

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta \mathfrak{s}_i \, d\nu = 0. \qquad (6)$$

Die Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ ist Funktion von u_i und ν, so daß bei konstantem ν die Gleichung (6) wie folgt geschrieben werden kann:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} \delta u_i \, d\nu = 0. \qquad (7)$$

Mit Rücksicht auf die Bedingung (5), kann die Gleichung (7) nur dann für beliebige δu_i gelten, wenn:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} = \text{const.} \qquad (8)$$

für alle Frequenzen und alle Teilstrahlungen ist. Die Konstante bestimmen wir in bekannter Weise aus dem Entropiezuwachs der schwarzen Strahlung bei unendlich kleiner Zunahme der Strahlungsenergie bei konstantem Volumen; indem wir die Gleichungen (7), (8) und (5) berücksichtigen, wird:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} \delta u_i \, d\nu = \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} \sum_{i=1}^{i=\infty} V \int_0^\infty \delta u_i \, d\nu =$$
$$= \frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} \cdot \delta U = \frac{\delta U}{T},$$

woraus ohne weiteres die zu beweisende Beziehung (4) folgt.

Um die thermodynamische Unabhängigkeit der einzelnen Teilstrahlungen u_i zu beweisen, werden wir die Gültigkeit der Beziehung (4) voraussetzen und mit Hilfe dieser Beziehung und der Gleichung (2) die Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ bestimmen und alsdann prüfen, ob auch die Gleichung (3) restlos erfüllt ist.

Indem wir aus der Gleichung (2) $\frac{1}{T}$ berechnen und in die Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathfrak{s}_i}{\partial u_i} = -\frac{k}{i h \nu} \log \frac{c^3 u_i}{8 \pi h \nu^3}.$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt die gesuchte Entropiedichte $\mathfrak{s}_i$ der $i$ten Teilstrahlung:

$$\mathfrak{s}_i = -\frac{k u_i}{i h \nu} \left(\log \frac{c^3 u_i}{8 \pi h \nu^3} - 1 \right). \qquad (9)$$

Wir bilden jetzt die Summe aller dieser Entropiedichten und ersetzen darin u_i durch den Ausdruck (2), alsdann erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8 \pi k \nu^2}{c^3} \left| \log e^{\frac{h\nu}{kT}} \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} \right|. \qquad (10)$$

Die Summationen ergeben:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1};$$

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i} e^{-\frac{ih\nu}{kT}} = -\log \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right).$$

Indem wir in dem Ausdruck (10) die Summationsresultate einsetzen und in der Klammer das Glied

$$\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \log \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right)$$

addieren und subtrahieren, erhalten wir nach einer einfachen Umformung:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8 \pi k \nu^2}{c^3} \left| \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) \log \left(1 + \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) - \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \log \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right|.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1) folgt:

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \mathfrak{s}_i = \frac{8 \pi k \nu^2}{c^3} \left| \left(1 + \frac{c^3 u}{8 \pi h \nu^3} \right) \log \left(1 + \frac{c^3 u}{8 \pi h \nu^3} \right) - \frac{c^3 u}{8 \pi h \nu^3} \log \frac{c^3 u}{8 \pi h \nu^3} \right|.$$

Dieser letztere Ausdruck für die Summe der Entropiedichten der Teilstrahlungen ist aber identisch mit der Entropiedichte der gesamten Hohlraumstrahlung[1]). Wir sehen daraus, daß die Gleichung (3) tatsächlich erfüllt ist. Damit ist der am Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz bewiesen.

1) Vgl. M. Planck, l. c., Gleichung (279), S. 163.

2. Physikalische Bedeutung der Teilstrahlungen.

Wir wollen jetzt die physikalische Bedeutung einer einzelnen solchen Teilstrahlung, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese, nach der Einsteinschen Methode[1]) näher untersuchen.

1) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. l. c.

Die Entropiedichte einer $i$ten Teilstrahlung ist durch den Ausdruck (9) gegeben. Sei ε_i die Energie, die der $i$ten Teilstrahlung in einem Hohlraum mit Volumen V_0 zukommt, so daß

$$\varepsilon_i = V_0 u_i$$

ist. Betrachten wir diese Strahlung einmal in dem Volumen V_0 und das andere Mal in einem Teilvolumen V vereinigt, dann sind die entsprechenden Entropien nach Gleichung (9):

$$S_0 = -\frac{k\varepsilon_i}{i h\nu}\left(\log\frac{c^3\varepsilon_i}{8\pi h\nu^3 V_0} - 1\right),$$

$$S = -\frac{k\varepsilon_i}{i h\nu}\left(\log\frac{c^3\varepsilon_i}{8\pi h\nu^3 V} - 1\right),$$

und die Entropieveränderung beim Übergang vom Volumen V_0 zu dem Volumen V wird:

$$S - S_0 = \frac{k\varepsilon_i}{i h\nu}\log\frac{V}{V_0}.$$

Indem wir die bekannte Boltzmannsche Beziehung zwischen der Entropie und der Wahrscheinlichkeit:

$$S - S_0 = k \log W_i$$

berücksichtigen, erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit W_i, daß sich die im Volumen V_0 eingeschlossene Strahlungsenergie ε_i zu einem beliebigen Zeitmoment in dem Teilvolumen V befindet, den Ausdruck:

$$W_i = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{\varepsilon_i}{i h\nu}}, \qquad (11)$$

der nichts anderes bedeutet, als daß die $i$te Teilstrahlung aus:

$$\frac{\varepsilon_i}{i h\nu}$$

voneinander räumlich unabhängigen Strahlungsquanten $ih\nu$ zusammengesetzt ist. Der Ausdruck (11) läßt sich nämlich als ein Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten $\frac{V}{V_0}$ deuten, und zwar dafür, daß sich ein einzelnes von den Quanten $ih\nu$ in beliebigem Zeitmoment im Teilvolumen V befindet, was direkt auf die gegenseitige Unabhängigkeit dieser Ereignisse und damit auf die räumliche Unabhängigkeit der Quanten $ih\nu$ selbst voneinander schließen läßt.

Wir wollen diese aus i-Quanten $h\nu$ bestehenden Lichtquanten im Gegensatz zu den „Lichtatomen", die nur aus einem $h\nu$ bestehen, „Lichtmoleküle" nennen.

Aus allen diesen vorhergehenden Betrachtungen ersehen wir, daß die Hohlraumstrahlung, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus betrachtet, aus voneinander räumlich unabhängigen Lichtmolekülen $h\nu$, $2h\nu$, $3h\nu$.... zusammengesetzt ist.

Wir untersuchen jetzt, wie sich die Zahlen der verschiedenen Lichtmoleküle in Abhängigkeit von der gesamten Strahlungsdichte ändern. Die Zahl der Lichtmoleküle pro Volumeneinheit, welche aus i-Lichtatomen zusammengesetzt sind, ist:

$$n_i = \frac{u_i}{i h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{e^{-\frac{ih\nu}{kT}}}{i}.$$

Wir bilden das Verhältnis:

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} = \frac{i+1}{i}\cdot e^{\frac{h\nu}{kT}}, \qquad (12)$$

Im Gebiete der Gültigkeit des Wienschen Strahlungsgesetzes, also bei geringen Strahlungsdichten, ist $\frac{h\nu}{kT}$ sehr groß gegen 1 und wir sehen aus (12), daß das Verhältnis der Zahl der Lichtmoleküle mit i-Lichtatomen zu der Zahl derjenigen mit $i+1$-Lichtatomen sehr groß wird, so daß praktisch nur die Lichtquanten mit einem Quant $h\nu$, also die Lichtatome allein, vorhanden sein werden. Mit abnehmendem Wert von $\frac{h\nu}{kT}$, also bei steigender Strahlungsdichte, wird das Verhältnis (12) immer kleiner werden, die Reihe (1) wird immer langsamer konvergieren, so daß dann allmählich auch die Lichtmoleküle mit größerer Quantenzahl erscheinen werden. Wir sehen daraus, wie mit zunehmender Strahlungsdichte eine Assoziation von Lichtquanten zu immer komplizierteren Lichtmolekülen stattfindet, bis schließlich die Quanten bei sehr großen Strahlungsdichten, im Gültigkeitsbereich des Jeans-Rayleighschen Strahlungsgesetzes, sich zu einem Kontinuum zusammenballen! Umgekehrt mit abnehmender Strahlungsdichte dissoziiert das Strahlungskontinuum in immer einfachere Lichtmoleküle, bis es sich schließlich in diskrete Lichtatome auflöst!

Zusammenfassung.

In dieser Abhandlung wurde Folgendes bewiesen:

1. Die schwarze Strahlung besteht aus einer Reihe von, nach Art der Wienschen Strahlungsformel zusammengesetzten, thermodynamisch voneinander unabhängigen Teilstrahlungen.

2. Diese Teilstrahlungen lassen sich, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus, als aus voneinander räumlich unabhängigen Lichtmolekülen $ih\nu$ zusammengesetzt deuten.

3. Die bei großer Strahlungsdichte kontinuierliche Hohlraumstrahlung löst sich, vom Standpunkt der Einsteinschen Lichtquantenhypothese aus, mit abnehmender Strahlungsdichte in immer einfachere Lichtmoleküle auf, die schließlich bei sehr kleinen Strahlungsdichten in diskrete Lichtatome dissoziieren.

Zürich, April 1921.

(Eingegangen 2. Mai 1921.)

Erwiderung auf H. Dinglers Kritik an der Relativitätstheorie.

Von Hans Reichenbach.

In letzter Zeit hat Herr H. Dingler die Behauptung aufgestellt, daß die begrifflichen Grundlagen der Relativitätstheorie falsch seien[1]). Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Dinglersche Argumentation entscheidende Fehler enthält und daher unhaltbar ist.

1. Herr Dingler knüpft an das bekannte Beispiel des beschleunigten Eisenbahnwagens an. Obgleich dieses Beispiel durch die häufige Erwähnung nachgerade recht trivial geworden ist und von Relativitätstheoretikern, besonders im Anschluß an Herrn Lenards wiederholt vorgebrachtes Mißverständnis oft genug restlos geklärt wurde[2]), sei hier der Vollständigkeit halber noch einmal darauf eingegangen. Herr Dingler erklärt, daß der gebremste Eisenbahnwagen dem gleichförmig bewegten nicht vergleichbar sei, weil im ersten Fall die (negative) Beschleunigung nicht an den Gegenständen des Coupés direkt angreift, sondern auf sie erst durch elastische Kräfte übertragen wird. Nur in einem „echten" Gravitationsfeld, das man sich etwa durch eine große Masse, parallel zu den Schienen wirkend, erzeugt denken könne, sei völlige Äquivalenz gegeben; aber hier sei auch kein Unterschied zwischen gleichförmiger und beschleunigter Bewegung bemerkbar, wenn Reibungskräfte verschwinden. Dies letztere ist richtig, nur ist es vom Standpunkt der Newtonschen Theorie nicht hinreichend zu erklären. Denn der beschleunigte Eisenbahnzug stellt in diesem Falle ein (frei fallendes) System dar, in dem die Newtonschen Gesetze gelten, obgleich es sich zur Schar der gleichförmig bewegten Inertialsysteme des Weltalls beschleunigt bewegt. Für die Newtonsche Theorie ist es ein Zufall, daß in diesem System die Gravitationskräfte überall gerade kompensiert werden durch Trägheitskräfte, so daß ein „scheinbares" Inertialsystem entsteht; derselbe Zufall, der träge und schwere Masse gerade gleich macht.

Nun wird zwar Herr Dingler diesen Zufall bestreiten, denn er hat an anderer Stelle einen „Beweis" für die Gleichheit von träger und schwerer Masse gegeben[1]). Wie sehr Herr Dingler dieses Problem überhaupt verkennt, sei dadurch illustriert, daß ich seinen Beweis hier wiedergebe. Er denkt sich eine Wage, an der zwei gleich schwere Massen aufgehängt sind, und schließt daran folgende Ausführungen: „Ich kann aber eine derartige ruhende Wage mit den beiden im Gleichgewicht befindlichen Massen in folgender Weise auffassen: Die Massen erhalten durch die Gravitation der Erde eine gewisse gleiche Beschleunigung nach unten. Daß sie dieser Beschleunigung nicht Folge leisten, ist bewirkt durch eine genau ebenso große, genau entgegengesetzt gerichtete Beschleunigung nach oben. Dadurch, daß beide sich aufheben, ist die Wage in Ruhe. Nun wird aber der Zug nach oben nicht ebenfalls durch Gravitation ausgeübt, sondern durch irgendeine Nahkraft (etwa meine Hand usw.). In Hinsicht auf diesen Zug, welcher den beiden Massen eine Beschleunigung nach oben erteilt und am Drehpunkt des Hebels angreift, sind die beiden Massen aber nicht schwere, sondern träge Massen. Da aber natürlich kein Ausschlag der Wage erfolgen kann (sonst wären die Massen ja auch nicht gleich schwer gegen die Voraussetzung), so bleibt die Wage im Gleichgewicht, und es zeigt sich, daß die beiden Massen auch gleich träge sind." Hier wird die seltsame Behauptung aufgestellt, daß der von der Aufhängevorrichtung ausgeübte und durch den Wagebalken übertragene elastische Zug, der die beiden Massen nach oben zieht und die Gravitation kompensiert, der trägen Masse proportional sei. Wie das zusammenhängt, obgleich von Bewegung gar nicht die Rede ist, und die träge Masse durch den Widerstand gegen Bewegungsänderung definiert ist — wird Herrn Dingler zu erklären schwer fallen. (Es scheint, daß der doppelte Gebrauch des Wortes Beschleunigung, einmal im kinematischen Sinne für den Geschwindigkeitszuwachs und andererseits im dynamischen Sinne für die Feldstärke der Gravitation, die Ursache seiner Verwechslung wurde.) In Wahrheit ist natürlich der elasti-

1) Diese Zeitschr. **21**, 668, 1920.

2) Vgl. z. B. A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie, Naturwiss. **6**, 700—701, 1918; und A. Kopff, Das Rotationsproblem in der Relativitätstheorie, Naturwiss. **9**, 9ff., 1921.

1) H. Dingler, Grundlagen der Physik, Berlin 1919, S. 94.

sche Zug durch die schwere Masse bestimmt, deren Zug er zu kompensieren hat. In Herrn Dinglers Beweis für die Gleichheit von träger und schwerer Masse kommt also die träge Masse gar nicht vor.

Aber durch Herrn Dinglers Kritik des Eisenbahnproblems wird die Frage, um die es sich handelt, überhaupt verschoben. Wenn der Zug durch Reibung gebremst wird, so sind die verursachenden Kräfte allerdings nicht massenproportional. Daß diese Kräfte aber die losen Gegenstände des Coupés nicht mitnehmen, liegt an dem Trägheitswiderstand dieser Körper; wäre die Trägheit beliebig klein, so würde eine beliebig kleine Kraft genügen, die Bewegungsänderung auf die Körper zu übertragen. Der beobachtete Effekt — das horizontale[1]) Verrücken der Körper, der Druck auf die Seitenwand — ist also durch die Trägheit der Körper verursacht und auch quantitativ dadurch gegeben. Wenn Trägheitswirkungen auftreten sollen, so darf die Beschleunigung gerade nicht durch massenproportionale Kräfte erzeugt werden. Darum ist es völlig sinnlos, die Reibungskräfte aus dem Problem ausschalten zu wollen; sie (oder irgendwelche elastischen Kräfte) haben die Aufgabe, zwei Körpersysteme in relativ zueinander beschleunigte Bewegung zu versetzen. Mit massenproportionalen Kräften ist dies gar nicht möglich. (Auch Herrn Lenards hierauf bezügliche Einwände treffen das Problem gar nicht.) Erst so entsteht jener konstruierte Tatbestand, den die Relativitätstheorie betrachtet; denn sie will ja zeigen, daß in zwei zueinander beschleunigten Körpersystemen die Unterscheidung zwischen Trägheit und Gravitation willkürlich ist.

Und die Relativitätstheorie stellt nun folgende oft genug bewiesene Behauptung auf, die auch Herr Dingler nicht bestreiten kann: Nimmt man an, der (gebremste) Zug steht still, und es tritt ein Gravitationsfeld[2]) auf, so entsteht dieselbe Wirkung, wie wenn man annimmt, daß der Eisenbahnzug in einem gravitationsfreien System (negativ) beschleunigt wird. An der Richtigkeit dieser Behauptung ist nicht mehr zu zweifeln; es gibt gar keine Erscheinung, auch außerhalb des Eisenbahnzuges, die nicht von beiden Standpunkten in gleicher Weise erklärt werden könnte. Die Relativitätstheorie schließt nun folgendermaßen weiter: Es ist bewiesen, daß zwei verschiedene Ereignisse E_1 und E_2 dieselbe Wirkung W haben; also darf ich aus dem beobachteten Eintreten von W nicht schließen, daß nur E_1 eingetreten sein kann. Wenn man aber behauptet, wie Herr Dingler (und auch Herr Lenard), daß die Wirkungen im Coupé beweisen, daß der Zug bewegt ist, so begeht man diesen Fehlschluß[1]). Es ist das große Verdienst von Mach[2]) auf diesen Fehlschluß hingewiesen zu haben; er fügt dem hinzu, daß man eigentlich E_1 und E_2 in diesem Falle als identisch ansehen muß. Real ist nur die Relativbewegung der beiden Dinge.

2. Herr Dingler will den Bewegungszustand der Inertialsysteme des Weltalls, abgesehen von der gleich zu erwähnenden Drehung, durch Beziehung auf die Gesamtheit der Fixsterne festlegen. In diesen durch allmähliche astronomische Approximation gewonnenen Systemen und exakt nur in diesen gilt, so führt er aus, das Galileische Trägheitsgesetz. Hier geht Herr Dingler die von ihm unbemerkte Voraussetzung ein, daß die Rechnungen an verschiedenen Fixsternen, die auf Anwendung der Newtonschen Gesetze beruhen, überall zu derselben Inertialschar führen. Diese Annahme, die auch in der Newtonschen Theorie liegt, läßt sich aber a priori gar nicht beweisen, im Gegenteil erscheint sie von vornherein unwahrscheinlich. Es ist der Sinn der Einsteinschen Theorie, daß sie diese Voraussetzung durch eine viel näher liegende und experimentell aufs beste bewiesene Hypothese ersetzt: es gibt zu jedem Punktereignis ein Inertialsystem, aber im allgemeinen zu jedem Weltpunkt ein besonderes. Dies ist das Einsteinsche Äquivalenzprinzip; das Gravitationsfeld läßt sich lokal immer „wegtransformieren". An Stelle des Integralprinzips der Newtonschen Theorie tritt also ein Differentialprinzip; und während dieses durch die Gleichheit von träger und schwerer Masse experimentell gesichert erscheint, wird die Integrabilität auf

1) Denn die vertikale Komponente bei etwa herunterfallenden Körpern entsteht durch das Erdfeld, und dieser Effekt interessiert hier nicht.

2) Dieses Gravitationsfeld herrscht nicht nur innerhalb des Coupés, sondern auch in der Umgebung des Zuges. Die Frage nach der Ursache dieses Gravitationsfeldes brauchen wir hier nicht zu behandeln; es läßt sich bekanntlich ähnlich auf Massenwirkungen zurückführen, wie alle andern Gravitationsfelder.

1) Man wende auch nicht ein, die Annahme, daß E_1 stattfindet, sei einfacher und darum zu bevorzugen. Es liegen hier drei Erklärungsmöglichkeiten vor: 1. E_1 hat stattgefunden; 2 E_2 hat stattgefunden; 3. es ist beliebig, E_1 oder E_2 als vorliegend zu betrachten. Daß die letztere Annahme die einfachere ist, d. h. im Rahmen einer einheitlichen Theorie möglichst viele Tatsachen erklärt, ist durch die Einsteinsche Durchführung der allgemeinen Kovarianz bewiesen.

2) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung, Leipzig 1904. 5. Aufl., S. 252. Die betreffende Stelle ist wiedergegeben bei A. Kopff, a. a. O., S. 10.

besonders einfache Fälle beschränkt, die nur ausnahmsweise und angenähert realisiert sind.

Die Orientierung der Inertialschar gegen Rotation will Herr Dingler durch das Foucaultsche Pendel festlegen. Er hält dies für einen ganz neuen, von ihm in 15 Jahren entwickelten Gedanken (diese Zeitschr. a. a. O. S. 670, 2). Dies muß befremden, denn es ist nichts als der Newtonsche Gedanke, der die Annahme eines in bezug auf Drehung absoluten Raumes bedeutet. Ob man die absolute Orientierung durch das Verschwinden der Zentrifugalkraft oder durch die Pendelebene definiert, ist kein nennenswerter Unterschied; es bleibt immer dieselbe Auszeichnung der Trägheitskräfte als absolut[1]). Der Dinglersche Standpunkt ist also ein Gemisch von Mach und Newton; in bezug auf Translation ist der Bewegungszustand der Inertialsysteme des Weltalls durch die Fixsternmassen bestimmt, in bezug auf Drehung durch den absoluten Raum. Man wird diese Lösung des Bewegungsproblems nicht gerade konsequent nennen können, auch gilt dies nicht von einer Erkenntnistheorie, die solche Lösungen zuläßt. Der Fehler dieser Lösung ist direkt bewiesen, wenn man die allgemeine Kovarianz als empirisch bestätigt ansehen kann, denn dann bedeutet sie wie oben den Schluß aus der Beobachtung von W auf das Stattfinden von E_1.

3. Die Gleichzeitigkeit will Herr Dingler durch den Transport von Uhren definieren, die an derselben Stelle verglichen, gleich gehen. Er gibt zu, daß diese Definition der Gleichzeitigkeit auf gewissen Voraussetzungen beruht, formuliert aber das notwendige Axiom ganz unscharf und behauptet dann, daß die Relativitätstheorie es ebenso voraussetzt. Er nennt als Voraussetzung, „daß sich durch eine bloße Bewegung der Uhr ihr Gang nicht ändere" (a. a. O. S. 672, 1), und behauptet dann, daß ja auch die Relativitätstheorie mit einem gleichmäßigen Gang der Uhren rechnet, obwohl jede ruhende Uhr als bewegt aufgefaßt werden kann. Er übersieht dabei, daß alle Spekulationen über die Gangänderung einer einzelnen Uhr leer sind, und daß erst der Vergleich mit anderen Uhren zu beobachtbaren Phänomenen führt. Das Axiom muß deshalb so lauten: „Zwei Uhren, die an einer Stelle benachbart gleichgestellt werden, sind, wenn sie auf verschiedenen Wegen an eine andere Stelle transportiert werden, dort wieder synchron". Dies ist eine empirisch nachprüfbare Behauptung. Die Relativitätstheorie erklärt sie für falsch, sie behauptet also, daß die Uhren im allgemeinen bei dem zweiten Zusammentreffen nicht mehr synchron sind. Sie hat dazu zwar keinen direkten, aber sehr viele indirekte Beweise; Herr Dingler aber hat für das Axiom keinen anderen Beweis, als daß man vor Einstein immer daran geglaubt hat. Daß aber die Relativitätstheorie im Widerspruch zu ihrer expliziten Behauptung dieses Axiom dennoch irgendwo implizit voraussetzt, kann ihr auch der Gegner nicht nachsagen.

4. Die Aussage, daß die Relativitätstheorie empirisch bestätigt sei, erkennt Herr Dingler nicht an, weil zuvor bewiesen werden müßte, „daß jede Theorie empirisch bestätigt oder widerlegt werden könnte, oder daß die Relativitätstheorie eine solche Theorie sei" (a. a. O. S. 673, 2). Dies ist einer von den vielen Fällen, wo Herr Dingler einen richtigen Gedanken durch falsche Formulierung entstellt. Wenn ich bewiesen habe, daß ein Körper viereckig ist, so ist damit der Beweis erbracht, daß es viereckige Körper gibt, und daß der Körper einer von diesen sei. Es ist unnötig, zuvor den allgemeinen Satz zu beweisen, sondern dieser Beweis wird durch den Beweis des Einzelfalls mitgeliefert. Das Problem liegt vielmehr darin, ob der Beweis des betreffenden Einzelfaktums anerkannt werden kann; dazu ist nötig, daß man Kriterien für einen richtigen Beweis aufstellt und nachsieht, ob der betreffende Beweis diese Kriterien erfüllt. Und hier liegt das Richtige in Herrn Dinglers Behauptung: Diese Kriterien beruhen auf logischen Forderungen, und darum sind logische Forderungen in der Physik enthalten[1]). Es ist aber ein großer Irrtum, wenn man behauptet, die Relativitätstheorie sei sich dieser Forderungen nicht bewußt. Sie hat sie im Gegenteil stets angewandt. Als Kriterien der Geltung einer Theorie für die Wirklichkeit führe ich an:

1. Die Theorie muß in sich widerspruchsfrei sein.
2. Die Theorie muß die einfachste unter allen denen sein, die dasselbe Erscheinungsgebiet umfassen.
3. Die Interpretation der empirischen Daten muß nach dem normalen Induktionsverfahren der Physik erfolgen.

1) Vom Standpunkt der Relativitätstheorie ist natürlich das Foucaultsche Pendel sehr leicht erklärt: das am Nordpol der Erde aufgestellte Pendel würde auch dann seine Ebene, von der Erde aus betrachtet, ändern, wenn die Erde als ruhend angenommen wird und die Fixsterne rotieren. Die Fixsterne „nehmen die Pendelebene mit".

1) Allerdings folgt daraus nicht, daß diese Forderungen völlig willkürlich sind, wie Dingler in seinem genannten Buch behauptet. Für die Beurteilung dieser Fragen verweise ich auf mein Buch: Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, Springer 1920, Abschnitt V und VI.

Alle drei Kriterien werden von der Relativitätstheorie erfüllt. Über das zweite Kriterium ist natürlich noch kein abschließendes Urteil möglich, aber bisher ist jedenfalls eine gleichwertige einfachere Theorie nicht aufgestellt, trotz vieler Versuche. Für die Bedeutung des dritten Kriteriums verweise ich auf meine genannte Schrift (S. 60—64).

5. Herr Dingler vertritt die Ansicht, daß über die Geltung der Geometrie keine empirische Entscheidung getroffen werden kann. Dies ist insofern richtig: Will man an der euklidischen Geometrie festhalten, so kann man die Physik so abändern, daß diese Forderung erfüllt wird. Man muß aber die andere, erkenntnistheoretisch ebenso fundamentale Forderung aufgeben, daß die natürlichen starren Körper die Kongruenzaxiome der Theorie erfüllen. Herr Dingler bestreitet diese Alternative und gibt dafür folgenden Beweis: Um zu beweisen, daß die euklidische Geometrie, angewandt auf die natürlichen starren Körper, falsch sei, muß ich die euklidische Geometrie selbst wieder in allen meinen empirischen Messungen voraussetzen; darum sei der Beweis ein Zirkel. Es handelt sich also um einen Einwand im Sinne des von mir genannten ersten Kriteriums. Auf das Fehlerhafte dieses Beweisgangs habe ich bereits an anderer Stelle[1]), bei der Diskussion der Kantischen Philosophie, hingewiesen, denn Herrn Dinglers Beweis ist ja nichts anderes als die Schlußweise der Kantischen Aprioritätsphilosophie. Hier sei der Inhalt meines Gedankengangs in einer Formulierung, die mir Herr K. Grelling kürzlich gesprächsweise mitteilte, wiedergegeben. Voraussetzung: A ist B. Ich beweise durch logisch richtige Operationen und Hilfssätze hieraus, daß A nicht B ist. Dann folgt, daß in der Tat A nicht B ist, denn die gegenteilige Annahme führt ja zum Widerspruch. Vorausgesetzt muß dafür nur werden, daß nicht auch die Annahme: „A ist nicht B" zur Konsequenz „A ist B" führt, denn sonst läge eine echte Paradoxie vor.

Dies ist nun in der Tat die Schlußweise, die in der Relativitätstheorie vorliegt. Das möge an einem Beispiel gezeigt werden, welches zwar nicht die Ungültigkeit der 3-dimensionalen euklidischen Geometrie beweist, aber etwas Ähnliches für die 4-dimensionale Raumzeitwelt zeigt. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist unter der Voraussetzung der euklidischen Geometrie (im 3- und 4-dimensionalen Raum) bewiesen worden; denn bei Messungen an der Drehwage liegt allen Auswertungen der Instrumentsablesungen diese Geometrie zugrunde. Eine weitere Bestätigung der Gleichheit beider Massen liegt darin, daß das Newtonsche Gravitationsgesetz wenigstens näherungsweise im Weltraum gilt, denn auch dieses Gesetz arbeitet ja mit der Massengleichheit; allerdings hat diese Bestätigung nicht den Genauigkeitsgrad der Eötvösschen. Aus der Gleichheit der beiden Massen folgt nun, daß es zu jedem Weltpunkt ein lokales System gibt, in dem keine Gravitationswirkungen bemerkbar sind, nämlich das Ruhsystem eines frei fallenden Massenpunktes. Für Weltpunkte verschiedener Newtonscher Gravitationsfeldstärke (d. h. inhomogene Felder) sind diese lokalen Inertialsysteme zueinander in beschleunigter Bewegung. Es tritt nun eine zweite, ebenfalls unter der Voraussetzung euklidischer Maßverhältnisse experimentell gut bewiesene Voraussetzung hinzu: daß in solchen gravitationsfreien Systemen die spezielle Relativitätstheorie gilt. Wir müssen hinzufügen, daß dies auch für Koordinatensysteme beliebig geringer Ausdehnung gilt, daß also die absolute Größe der räumlichen Dimensionen keinen Einfluß auf die Geltung der speziellen Relativitätstheorie besitzt (Homogenität des Raumes). In dem lokalen Inertialsystem gilt also das Minkowskische Linienelement $ds^2 = \sum dx_\nu^2$. Hieraus folgt wieder, daß in jedem dazu beschleunigt bewegten System dieser einfache Ausdruck nicht gilt, wenn man dort die Koordinaten durch ruhende starre Stäbe und Uhren definiert (wir nennen dies: „natürliche Koordinaten"), denn jede nicht linear-orthogonale Transformation verwandelt ja das Linienelement in $ds^2 = \sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$. Versucht man nun, den ganzen Raum durch ein Koordinatennetz zu erfüllen, das in jedem Punkt die euklidische Maßbestimmung $ds^2 = \sum dx_\nu^2$ trägt, so müssen die einzelnen Teile des räumlichen Koordinatennetzes zueinander beschleunigt bewegt sein, denn sie müssen ja in jedem Punkt dem lokalen Inertialsystem entsprechen. Hieraus folgt, daß das Koordinatennetz im allgemeinen nicht mittels starrer Stäbe realisiert werden kann. Damit ist bewiesen — denn die Umkehrung gilt auch, weil nur die lokalen Inertialsysteme eine euklidische Maßbestimmung besitzen —, daß ein durch starre Stäbe und ruhende Uhren realisiertes Koordinatensystem nicht an allen Punkten des Raumes vierdimensional-euklidische Maßverhältnisse besitzt. Wir vollziehen also folgendes Schlußschema:

Voraussetzung a: Geltung der euklidischen Geometrie in natürlichen Koordinaten.

1) a. a. O. S. 62.

Hilfssatz b: Gleichheit von träger und schwerer Masse.

Hilfssatz c: Geltung der speziellen Relativitätstheorie in solchen Koordinatensystemen, in denen keine Gravitationswirkungen beobachtbar sind, auch für beliebig kleine Bezirke.

Folgerung d: Ungültigkeit der euklidischen Geometrie in natürlichen Koordinaten.

Dies ist der im obigen logischen Verfahren geschilderte Widerspruch. Das umgekehrte Schema gilt hier natürlich nicht, d. h. aus der Voraussetzung der nichteuklidischen Geometrie folgt nicht die Geltung der euklidischen, so daß eine Paradoxie nicht vorliegt.

Es soll nun keineswegs behauptet werden, daß damit die Ungültigkeit der euklidischen Geometrie für natürliche Koordinaten mit absoluter Sicherheit bewiesen sei; sondern diese Ungültigkeit folgt immer nur, wenn man Hilfssatz b und c anerkennt. Hier handelt es sich nur darum, zu zeigen, daß der Beweis wenigstens logisch möglich ist; denn Hilfssatz b und c sind wenigstens logisch mögliche Annahmen.

Es gibt nun zwei in Betracht kommende Lösungen des Widerspruchs: entweder man läßt a fallen oder c. Herr Dingler wird vermutlich die letzte vorziehen; aber er setzt sich damit in Widerspruch zu einem empirisch gut bestätigten und logisch zulässigen physikalischen Resultat, eben der speziellen Relativitätstheorie. (Auch Herr Dingler hat noch keinen haltbaren Einwand gegen die spezielle Relativitätstheorie vorbringen können.) Was ich hier aber vor allem feststellen möchte, ist, daß Herr Dingler seine Lösung nicht damit begründen darf, daß eine andere Lösung unmöglich sei. Denn auch die Relativitätstheorie gibt eine zulässige Lösung des Widerspruchs, wie sogleich gezeigt werden soll.

Die Relativitätstheorie betrachtet b und c als empirisch so gut fundiert, daß sie die Ungültigkeit der euklidischen Geometrie als bewiesen ansieht. Damit ist bereits ein physikalisches Resultat gewonnen, wenn auch von negativem Charakter. Jedoch begnügt sie sich nicht damit, sondern sie will positiv die Geltung einer bestimmten anderen Geometrie, der Riemannschen, beweisen. Und hier entsteht das größere logische Problem, das durch das Grellingsche Schlußschema noch nicht berührt ist: wenn a fällt, darf ich dann zum Beweis der Riemannschen Geometrie wieder b und c verwenden, die doch selbst a enthalten? Die Problem läßt sich so formulieren: Nachdem bewiesen ist, daß A nicht B ist, will ich beweisen, A ist C. Es stehen mir aber nur Sätze (nämlich b und c) zur Verfügung, die auf der Annahme A ist B beruhen, also voraussetzen, A ist nicht C. Darf ich nun so schließen: A ist nicht C, ich beweise A ist C, also gilt A ist C?

Das wäre ein Fehlschluß. Aber dies ist auch gar nicht die Schlußweise der Relativitätstheorie. Betrachtet man nämlich die Sätze b und c genauer, so findet man, daß sie gar nicht a notwendig voraussetzen, sondern schon dann gelten, wenn a nur für kleine Raumgebiete gilt. Z. B. in den Dimensionen der Drehwage, an der die Gleichheit von schwerer und träger Masse bestätigt wird, oder der Elektronenröhren, in denen sich die Elektronen nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie bewegen. Denn die Meßgenauigkeit unserer empirischen Resultate läßt eine Unterscheidung zwischen euklidischer und nichteuklidischer Geometrie in kleinen Dimensionen gar nicht zu. Zwar ist die Bestätigung der Massengleichheit aus der Geltung des Newtonschen Gesetzes wieder an die Geltung der euklidischen Geometrie in astronomischen Dimensionen gebunden; aber hier ist die Bestätigung gerade ungenau, und es bleibt offen, diese angenäherte Gleichheit durch nur angenäherte Geltung der euklidischen Geometrie zu erklären[1]). Die Sätze b und c sind also mit der Geltung einer Riemannschen Geometrie von schwacher Krümmung ebenfalls vereinbar. Es ergibt sich dann folgendes Schlußverfahren:

Voraussetzung: A ist B oder C.
Hilfssätze, beruhend auf dieser Voraussetzung.
Folgerung: A ist C und nicht B.

Dies ist ein erlaubter Beweis für die Behauptung A ist C[2]). Ich habe diese Schluß-

1) Die Relativitätstheorie behauptet also, daß eine genaue Bestätigung der Massengleichheit an Sternen unter Benutzung der euklidischen Geometrie und des Newtonschen Gesetzes niemals erbracht werden kann; aber das ist trivial, denn es besagt eben nur, daß das Newtonsche Gesetz nicht gilt. Eine quantitativ exakte Bestätigung des Äquivalenzprinzips in astronomischen Dimensionen ist nur durch die Anwendung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen zu erzielen. Eine solche Bestätigung wäre keineswegs leer, sondern es ist das allgemeine Verfahren der Physik, eine Voraussetzung anzunehmen, und durch ihre widerspruchslose Durchführbarkeit in der Erfahrung ihre Gültigkeit stets erneut zu beweisen. Die astronomischen Bestätigungen der Relativitätstheorie sind darum ebenso Beweise für die Theorie als Gesamtheit wie für die Hilfssätze b und c.

2) Es ist noch hinzuzufügen, daß durch die Vereinbarkeit der Sätze b und c auch mit C das obige Grellingsche Schlußverfahren nicht gestört wird; denn

weise an anderer Stelle[1]) „Verfahren der stetigen Erweiterung" genannt; sie ist sehr charakteristisch für die moderne Physik und erlaubt eine ungeahnte Erweiterung der Forschungsprinzipien. Sie wird z. B. auch in der Quantentheorie angewandt, wo die diskrete Struktur der Energie mit Hilfe von Experimenten nachgewiesen wird, die makroskopische Stetigkeit der Energie voraussetzen. Denn jede rechnerische Auswertung der experimentellen Anordnung arbeitet natürlich mit dem Energiebegriff im alten Sinne, als einer stetigen Größe. In diesem Falle erfolgt der Schluß gerade umgekehrt, von großen auf kleine Dimensionen.

Logisch erkenntnistheoretische Einwände lassen sich deshalb gegen die Relativitätstheorie nicht erheben.

6. Ich bin, wie Herr Dingler, seit langem der Ansicht, daß eine Axiomatik der Physik notwendig ist, ja, daß der gegenwärtige Stand dieser Wissenschaft die Axiomatik dringend fordert. Es geht aber nicht an, daß die bereits vorliegenden Resultate, die aus der Physik herausgewachsen sind und in der Relativitätstheorie einen großartigen Ausbau gefunden haben, als „zur alten Physik gehörig" abgetan werden. Ich halte es für sehr bedauerlich, wenn das axiomatische Verfahren durch Verkennung physikalischen Denkens und inkorrekte Schlußweisen von vornherein diskreditiert wird.

---

hier ändert sich nichts, wenn die Hilfssätze auf „A ist B oder C" beruhen.

1) a. a. O., S. 66–68.

Stuttgart, Physikal. Institut d. Techn. Hochschule, April 1921.

(Eingegangen 18. Mai 1921.)

Eine elementare geometrische Darstellung der Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie.

Von P. Gruner.

Die verschiedenen geometrischen Darstellungen der Lorentz-Transformation benützen entweder rechtwinklige Koordinatensysteme mit imaginären Drehungswinkeln (bzw. imaginären Zeitkoordinaten) oder schiefwinklige Koordinatensysteme mit reellen Größen, bei denen aber die Einheitsmaße auf jeder Achse verschieden sind und erst durch das Minkowskische Einheitshyperboloid bestimmt werden müssen. Zur Einführung der Anfänger in das Verständnis der Relativitätstheorie ist aber eine geometrische Darstellung erwünscht, bei der keine imaginären Größen und keine verschiedenen Einheitsmaße auftreten. Eine solche Darstellung ist leicht zu finden, wenn man sich auf die Vergleichungen bloß zweier eindimensionaler Raumkoordinatensysteme beschränkt.

Zwei lineare, geradlinige Bezugssysteme OX und $O'X'$ mögen sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegen (man denke an zwei unendlich lange, parallele Eisenbahnzüge, die in absolut dunkler Nacht aneinander vorbeifahren), die Uhrangaben t und t' auf jedem System seien so reguliert, daß die Punkte O und O' im Moment ihres Zusammentreffens die Zeiten $t = 0$ und $t' = 0$ aufweisen, so gilt für jedes Zusammentreffen (Koinzidenz) irgend zweier Punkte mit den Abszissen x und x' und den Uhrangaben t und t' das System der Lorentzschen Transformationsgleichungen:

$$x' = \beta(x - \alpha \cdot c \cdot t) \quad x = \beta(x' + \alpha \cdot c \cdot t'),$$
$$c \cdot t' = \beta(c \cdot t - \alpha \cdot x) \quad c \cdot t = \beta(c \cdot t' + \alpha \cdot x),$$

worin

$$\alpha = \frac{v}{c}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \text{ (es ist stets } \beta > 1).$$

Setzt man zur Vereinfachung $c = 1$[1]), also $\alpha = v$, so kann man die Ereignisse auf zwei schiefwinklige Raum-Zeit-Koordinatensysteme OXT und $O'X'T'$ mit gemeinsamem Ursprung beziehen; nach Minkowski müssen dieselben je ein Paar konjugierter Durchmesser der invarianten Einheitshyperbel

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = 1$$

sein. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß es zwei solche Paare gibt, bei denen die Durchmesser alle gleich lang sind, und die symmetrisch zu den Achsen der Hyperbel liegen, also wechselseitig orthogonal stehen. Diese bilden die für geometrische Darstellung besonders geeigneten Raum-Zeit-Koordinatensysteme.

Diese Systeme lassen sich (wie mir Herr Dr. Sauter, Ingenieur in Bern, freundlichst mitteilte) auch direkt herleiten.

Man lege die Achse $OT \perp$ zur Achse OX' und die Achse OT' unter einer Neigung Θ zu OX', so daß

$$\cos \Theta = \alpha = \frac{v}{c},$$

also

$$\sin \Theta = \frac{1}{\beta}, \quad \text{cotang } \Theta = \alpha \cdot \beta.$$

---

1) Am vorteilhaftesten stellen sich die Relativitätsformeln dar, wenn man als Längeneinheit 1 Kilometer und als Zeiteinheit $1/300\,000$ Sekunde wählt. Wir schlagen für diese Zeiteinheit den Namen „Lichtsekunde" vor.

Die Achse OX wird dann wiederum $\perp OT'$ gestellt. Dann gelten in der Tat für die Parallelkoordinaten gemäß Fig. 1:

$$x' = \frac{x}{\sin\Theta} - t\cdot\operatorname{cotang}\Theta,$$

$$t' = \frac{t}{\sin\Theta} - x\cdot\operatorname{cotang}\Theta,$$

d. h. die oben angeführten Transformationsformeln für $c = 1$.

An Hand dieser leicht zu konstruierenden Koordinatensysteme lassen sich die Längenkontraktion und die Uhrgangverlangsamung ohne weiteres überblicken.

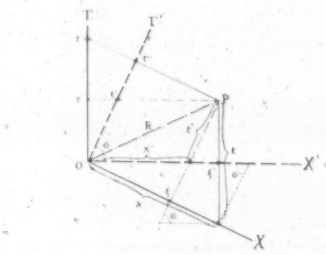


Fig. 1.

Im „gestrichelten" System $OT'X'$ (Fig. 2) geben die zur Zeitachse OT' parallel gelegten Weltgeraden die „Weltgeschichte" der in diesem System ruhenden Punkte. So stellt $A'B'$ stets die Länge l' eines in ihm ruhenden Maßstabes dar. Die im „ungestrichelten" System

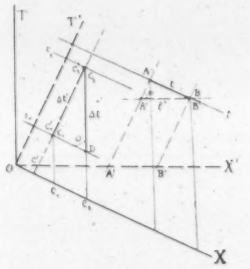


Fig. 2.

OTX ruhenden Beobachter können diese Länge l' nur messen, indem sie den Ort A und B der Endpunkte von l' bei gleicher Uhrangabe t (also auf einer Geraden parallel zu OX) ermitteln; sie finden dafür

$$l = l'\cdot\sin\Theta = \frac{1}{\beta}\,l',$$

d. h. die bekannte Lorentz-Kontraktion.

Ebenso kann der Uhrgang einer Uhr C' (Fig. 2) des gestrichelten Systems vom anderen System aus nur dadurch beurteilt werden, daß zwei Beobachter C_1 und C_2 dieses letzteren Systems ihre Uhrablesungen mit den Ablesungen der an ihnen vorbeigehenden Uhr C' vergleichen. Zeigt letztere ein Zeitintervall

$$\Delta t' = C_1'C_2',$$

so finden die ungestrichelten Beobachter das Zeitintervall

$$\Delta t = DC_2,$$

das durch die beiden zu OX parallelen, durch C_1 und C_2 gelegten Geraden bestimmt ist. Die Figur ergibt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sin\Theta} = \beta\cdot\Delta t',$$

d. h. die bekannte Einsteinsche Verlangsamung des Uhrganges der bewegten Uhr.

Diese Beispiele mögen genügen, um die Anschaulichkeit dieser einfachen geometrischen Methode darzutun. Es sei aber (ebenfalls nach Dr. Sauter) noch darauf hingewiesen, daß durch diese Wahl der Koordinatensysteme auch der etwas abstrakte Begriff von kovarianten und kontravarianten Komponenten eines Vektors anschaulich gemacht werden kann.

Es bezeichnen nämlich (Fig. 1):

die Parallelprojektionen des Vektors R: x, t; x', t' die kontravarianten Komponenten desselben und

die Orthogonalprojektionen: ξ, τ; ξ', τ' die kovarianten Komponenten desselben.

Denn es ist leicht einzusehen, daß

$$x\cdot\xi = x'\cdot\xi',\ t\cdot\tau = t'\cdot\tau'$$

ist, also die notwendige Invarianzbedingung

$$x\cdot\xi + t\cdot\tau = x'\cdot\xi' + t'\cdot t'$$

besteht. Daß auch hier allerlei anschauliche Folgerungen, auch betreffs des Fundamentaltensors g_{ik}, gezogen werden können, versteht sich von selbst.

Bern, 19. Mai 1921.

(Eingegangen 21. Mai 1921.)

Graphische Darstellung der Optik bewegter Körper.

Von Ed. Guillaume.

Im vorliegenden Berichte soll gezeigt werden, wie eine bemerkenswerte graphische Darstellung es gestattet, die wichtigsten Relationen der Optik bewegter Körper aufzustellen, falls man den universellen Zeitbegriff zuläßt[1]).

Betrachten wir, wie gewöhnlich, zwei rechtwinklige Koordinatensysteme S_1 (x_1, y_1, z_1), S_2 (x_2, y_2, z_2), welche sich relativ zueinander mit einer Geschwindigkeit v in Richtung ihrer zusammenfallenden x-Achsen fortbewegen. Um die Überlegung zu vereinfachen, denken wir uns die Systeme als Kontinua K_1 und K_2, welche sich gegenseitig durchdringen, wie etwa zwei Gase bei der Diffusion.

Betrachten wir im Ursprunge O_2 von S_2 eine Lichterregung (Huyghensschen Erregungspunkt im Kontinuum K_2), im Augenblicke wo er mit O_1 zusammenfällt. Diese Lichterregung pflanzt sich nach allen Richtungen fort mit der Geschwindigkeit $c_0 = 300000$ km/sec im Kontinuum K_2. Wenn wir von O_2 aus nach allen Richtungen den Vektor c_0 abtragen, erhalten wir ein sphärisches Hodograph:

$$c_2 = c_0. \qquad (1)$$

Welches ist nun das Hodograph für einen Beobachter im Kontinuum K_1? Nach dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gehen vom Erregungspunkte in K_1 Strahlen aus, die sich ebenfalls mit der Geschwindigkeit c_0 fortpflanzen. Was wir suchen, ist aber die momentane Geschwindigkeit im Augenblicke der Emission. Der Erregungspunkt O_2 wirkt dann auf K_1 wie eine bewegte Lichtquelle, und die von S_1 aus beobachtete Frequenz ν_1 wird von der Frequenz ν_2 auf S_2 verschieden sein. Die zweite Lorentzsche Gleichung:

$u_2 = \beta(u_1 - \alpha x_1)$, wo $\beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2)$, $\alpha = v : c_0$,

in welcher wir

$$x_1 = u_1 \cos\varphi_1$$

einsetzen, gibt uns den gewünschten Aufschluß. Wenn wir sie nämlich nach der universellen Zeit t, in Sekunden ausgedrückt, ableiten und setzen:

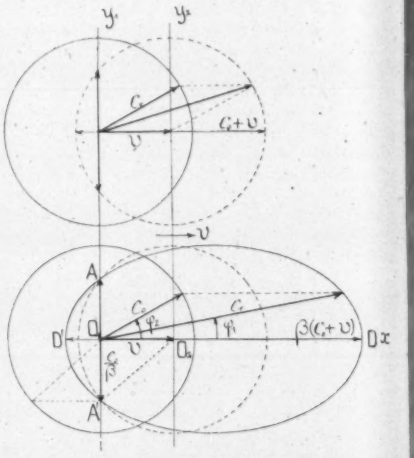
$$\frac{du_1}{dt} = c_1; \quad \frac{du_2}{dt} = c_2 = c_0,$$

so erhalten wir:

$$c_1 = \frac{c_0}{\beta(1 - \alpha\cos\varphi_1)}. \qquad (2)$$

1) Diese Zeitschr. **22**, 109—114, 1921.

Das Hodograph ist also ein Rotationsellipsoid, für welches der Punkt O_1, d. h. der mit dem Erregungspunkte O_2 bei der Emission zusammenfallende Punkt von K_1, ein Brennpunkt ist. Die Exzentrizität ist α und hängt nur von der Relativgeschwindigkeit v ab. In der Figur ist der Meridian des Ellipsoids angegeben, und sie zeigt in prägnanter Weise, worin sich die Relativitätstheorie von der Newton-Ritzschen Emissionstheorie unterscheidet. Diese stützt sich auf die Regel vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten (oberer Teil der Figur). In der Relativitätstheorie ist sozusagen das Parallelogramm verzerrt, in Richtung der Bewegung gedehnt.



Es läßt sich leicht ableiten:

a) Für den Dopplereffekt:

$$\frac{c_1}{\nu_1} = \frac{c_2}{\nu_2};$$

b) Für die Licht-Aberration:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\alpha + \cos\varphi_2}{1 + \alpha\cos\varphi_2};$$

c) Für die Fizeau-Fresnelsche partielle Mitführung (n = Brechungsindex):

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{n}; \quad \cos\varphi_1 = \frac{1 + \alpha n}{n + \alpha};$$

d) Für den Michelson- und Morleyschen Versuch (d = Abstand der im K_1 liegenden Spiegel):

$$\Delta t_v = \frac{d}{O_1 A} + \frac{d}{O_1 A'} = \frac{2\beta d}{c_0} = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}},$$

$$\Delta t_x = \frac{d}{O_1 D} + \frac{d}{O_1 D'} = \frac{d}{\beta}\left(\frac{1}{c_0 + v} - \frac{1}{c_0 - v}\right) = \frac{2d}{\sqrt{c_0^2 - v^2}},$$

also

$$\Delta t_y = \Delta t_x,$$

ohne daß es nötig ist, die Lorentz-Kontraktion einzuführen. Es ist aber zu bemerken, daß die Zeiten Δt_x und Δt_y (in Sekunden ausgedrückt) rein fiktiv sind, da die Geschwindigkeiten O_1A, O_1A', O_1D, O_1D' nach Voraussetzung momentane Übergangsgeschwindigkeiten von einem Systeme zum andern sind. Die wirklichen Durchlaufzeiten haben als gemeinsamen Wert $2d/c_1$.

Mit Hilfe der mehrparametrischen Darstellung der Zeit läßt sich das Ellipsoid auch wiederfinden. Betrachten wir die Lichterregung im Zeitpunkt 0, so ist die erzeugte Welle nach τ_2^0 Sekunden auf S_2 die Kugel:

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = c_0^2 (\tau_2^0)^2, \qquad (1')$$

wo τ_2^0 denselben Wert für alle Punkte (x_2, y_2, z_2) der Kugel hat. Auf S_1 ist die Kugel dargestellt durch:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 \tau_1^2; \qquad (3)$$

τ_1 ist aber keine Konstante, sondern:

$$\tau_1 = \frac{\tau_2^0}{\beta(1 - \alpha \cos \varphi_1)}, \qquad (4)$$

so daß die Welle von S_1 aus unter der Form eines Ellipsoids erscheint.

Da die Relativisten wünschen, daß die Welle von S_1 aus betrachtet ebenfalls kugelförmig erscheint, müssen sie annehmen, daß die Kugel für S_1 sich aus Punkten zusammensetzt, die keine gleichzeitige Existenz besitzen. Der Grund dieser Nichtgleichzeitigkeit ist leicht zu erkennen. Die τ_1 sind die Zeiten (in Sekunden ausgedrückt), welche das Licht brauchen würde, um die Radienvektoren des Ellipsoids mit der Geschwindigkeit c_0 zu durchlaufen:

$$\tau_1 = \frac{c_1 \times 1^{\text{sec}}}{c_0}.$$

Man begreift dann, warum die Lichtstrahlen nicht gleichzeitig die verschiedenen Oberflächenpunkte des Ellipsoids erreichen können. Während die Kugel (1') und das Ellipsoid synchron sind, stellt (3) für Einstein eine Fläche dar, deren Punkte nicht gleichzeitig bestehen können[1]).

Es ist wichtig, festzustellen, daß das Ellipsoid in Widerspruch steht mit der Verschiebung der Spektrallinien des Sonnenspektrums durch die Gravitation. Der Grund dafür ist folgender. Für uns sind die τ nur Lichtwege, geteilt durch die Lichtgeschwindigkeit; sie sind also Zeitmaße der Längen u. Für Einstein dagegen werden die τ als Angaben von Uhren betrachtet (Uhren mit Zifferblättern oder schwingende Atome). Setzt also Einstein:

$$\tau_1 = A \tau_2$$

(A = Konstante. Vgl. „Die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie, gemeinverständlich", 10. Aufl., S. 88), so nimmt er an, daß sie eine Beziehung darstellt zwischen verschiedenen Dauern, wie wenn es sich um Perioden handeln würde. Für uns aber bedeuten τ_1 und τ_2 die Zeiten, welche das Licht bräuchen würde, um die Lichtwege u_1 und u_2 zurückzulegen. Nehmen wir nun an, daß diese gleichzeitig durchlaufen werden, so sind dann τ_1 und τ_2 nur verschiedene Maße der gleichen Dauer, d. h. Maße mit Uhren von Schwingungsdauern Θ_1 und Θ_2 vorgenommen, so daß:

$$\Theta_1 \tau_1 = \Theta_2 \tau_2. \qquad (5)$$

Man weiß aber, daß in der Relativitätstheorie die Perioden der Dopplerschen Gleichung genügen:

$$\Theta_1 = \Theta_2 \beta(1 - \alpha \cos \varphi_1), \qquad (6)$$

so daß (4) und (6) miteinander multipliziert, wirklich zur Gleichung (5) führen, wobei Θ_1 und Θ_2 die Eigenperioden der Wellen sind, aus denen sich u_1 und u_2 zusammensetzten. Es folgt daraus, daß τ_1 und τ_2 selbst nicht als Perioden angesehen werden können. Was uns übrigens das Spektroskop zeigt, ist nicht die Periode des emittierenden Atoms selbst, sondern die Perioden der emittierten Lichtstrahlen, beim Erreichen des Apparats und diese sind gerade Θ_1 und Θ_2. Jedenfalls bleibt der Gedankengang Einsteins unbegreiflich. Nimmt man an, daß die oben angegebene Doppler-Relation a) allgemein, also auch für die Gravitation Gültigkeit hat, so gelangt man zu einer Beeinflussung durch das Feld, nicht nur für die Quelle, sondern für jeden Punkt des Lichtstrahls, der von der Lichtquelle im Unendlichen emittiert wird. Die Frequenz wäre also eine Funktion des Ortes und wäre für einen Lichtstrahl von der Sonne zur Erde gegeben durch eine Relation der Form:

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{\frac{r - a}{r + a}} < \nu_0,$$

1) Vgl. hierzu: M. v. Laue, „Die Relativitätstheorie", Bd. I, 3. Aufl., S. 50 (1919); ferner A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. 17 (1905), § 3, wo ein unzutreffender Schluß vorliegt.

wobei $a = 2GM : c_0^2$ (G = Gravitationskonstante; M = Masse der Sonne); ν_0 = Frequenz des emittierenden Atoms auf der Sonne; r = Abstand von der Sonne zur Erde, wo die Frequenz ν_r beobachtet wird.

Bern, Mai 1921.

(Eingegangen 23. Mai 1921.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen.

von J. Franck.

Der folgende Bericht bildet eine Fortsetzung des im Jahre 1919 in dieser Zeitschrift von J. Franck und G. Hertz[1]) über das gleiche Thema erstatteten zusammenfassenden Bearbeitung. Seit dem Erscheinen dieses Artikels sind eine sehr große Zahl von Arbeiten über Zusammenstöße langsamer Elektronen mit Gasmolekülen ausgeführt worden. Zum großen Teil sind es wieder Untersuchungen amerikanischer und englischer Forscher, die mit großem experimentellen Erfolge auf diesem Gebiete gearbeitet haben. Als Gesamtresultat ergibt sich der schon im vorigen Bericht als gesichert angesehene Zusammenhang mit der Bohrschen Atomtheorie und eine Bestätigung der Bohrschen Grundannahmen. In einzelnen Fällen liegen jedoch starke Widersprüche zwischen den Resultaten und Anschauungen verschiedener Autoren vor, so daß eine einheitliche Betrachtung zur Klärung beitragen kann. Das ist besonders dort der Fall, wo experimentell wertvolle Arbeiten, wie das bei einem neuen Gebiete vorkommt, auf eine bei näherem Zusehen nicht haltbare Weise gedeutet sind. Hinzu kommt, daß solche Untersuchungen sich als ein die optischen Methoden ergänzendes selbständiges Hilfsmittel zur Erforschung von Spektralzusammenhängen und des Atombaus erwiesen haben. Daher schien es angebracht, eine zusammenfassende Darstellung des Gebietes zu bringen, die weniger historisch als kritisch ist, und die es vermeidet, die experimentellen und theoretischen Grundlagen, soweit sie ausführlich im letzten Berichte besprochen sind, den Lesern dieser Zeitschrift noch einmal in extenso zu bringen.

Meßmethoden.

Die Methoden zur Messung der Spannungen, die Elektronen durchlaufen haben müssen, um beim Zusammenstoß mit Atomen oder Molekülen eine Lichtemission derselben anzuregen oder auch, um sie zu ionisieren, sind zum Teil schon im früheren Berichte besprochen worden. Insoweit das der Fall ist, genügt eine kurze Rekapitulation.

Zur Bestimmung der Anregungsspannungen des Anfangsgliedes der Absorptionsserien einatomiger Gase (der sogen. Resonanzlinien) wird oft die Methode des unelastischen Elektronenstoßes nach Franck und Hertz benutzt. Sie ist in ihrer alten Form nur anwendbar, wenn es sich um Gase ohne Elektronenaffinität, also Metalldämpfe und Edelgase, handelt. Das Prinzip der Methode ist folgendes:

Elektronen, die von einer Glühkathode ausgehen (die in der Fig. 1 mit dem Buchstaben D bezeichnet wird), werden in einem mit dem zu untersuchenden Gase gefüllten Raum (R)

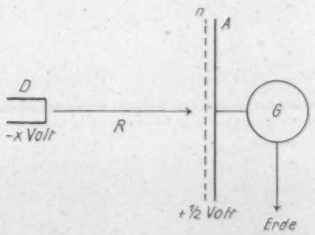


Fig. 1.

beschleunigt, und es wird der Bruchteil dieser Elektronen als Funktion der beschleunigenden Spannung mit einem Galvanometer G gemessen, der nach zahlreichen Zusammenstößen mit den Atomen eine merklich von Null verschiedene kinetische Energie besitzt. Man erhält dann Kurven, die bis zum Einsetzen der das Resonanzlicht anregenden Stöße einer gewöhnlichen glühelektrischen Stromspannungskurve gleichen; nur tritt wegen des komplizierten Weges, den die Elektronen unter vielfacher Reflexion an den Atomen zurücklegen, der Raumladungscharakter der Kurve schon bei sehr schwacher Elektronenemission deutlicher in Erscheinung als bei glühelektrischen Versuchen im Vakuum. Sobald die kritische Geschwindigkeit der Elektronen erreicht ist,

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 20, 132, 1919.

sinkt der Strom jäh ab, um mit weiter wachsender Feldstärke wieder anzuwachsen, bis die Elektronen das zweite Mal die zur Resonanzlinienanregung nötige Energie gewonnen haben. Da dieses Spiel sich periodisch wiederholt, so bekommt man scharfe Strommaxima im Abstande der Resonanzspannung, ohne durch die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen oder durch Kontaktpotentiale gestört zu werden, denn durch diese Einflüsse wird die Voltskala als Ganzes verschoben, der Abstand der Maxima voneinander jedoch nicht beeinflußt. Wird das Verhältnis von Druck zu Feldstärke so gewählt, daß die Elektronen zwischen zwei Zusammenstößen größere Beträge an kinetischer Energie gewinnen, so erreichen eine Anzahl Elektronen Geschwindigkeiten, die zur Anregung höherer Glieder derselben Serie oder Glieder einer ultravioletteren Absorptionsserie genügen.

Tabelle I.

Beobacht. Voltzahlen nach der korr. Voltskala	Berechnete Kombinationen aus $a = 4{,}9$ Volt und $b = 6{,}7$ Volt	ΔV
4,9	$a = 4{,}9$	0
—	$b = 6{,}7$	—
9,8	$2a = 9{,}8$	0
11,2	$a + b = 11{,}6$	— 0,4
13,5	$2b = 13{,}4$	+ 0,1
14,7	$3a = 14{,}7$	0
16	$2a + b = 16{,}5$	— 0,5
17,6	$a + 2b = 18{,}3$	— 0,7
19,3	$4a = 19{,}6$	— 0,3
20,2	$3b = 20{,}1$	+ 0,1
21,2	$3a + b = 21{,}4$	— 0,2

mittlere Abweichung: — 0,2 Volt

Die Fig. 2 zeigt als Beispiel eine in Quecksilberdampf aufgenommene Kurve, bei der die Bedingungen so gewählt sind, daß außer der Linie 2536 Å (in der Serienterminologie mit $1{,}5\,S - 2\,p_2$ bezeichnet) bei 4,9 Volt auch die Linie 1849 Å $= 1{,}5\,S - 2\,P$ bei 6,7 Volt angeregt wird. In der folgenden Tabelle sind die Voltwerte der Maxima nach Anbringung der aus dem Abstand der ersten beiden Maxima sich ergebenden Korrektur eingetragen. Es zeigt sich, daß von 10 Volt an alle Kombinationen zwischen 4,9 und 6,7 Volt auftreten. Die Kurve ist der Berliner Dissertation von E. Einsporn entnommen.

Diese Methode läßt sich so modifizieren, daß man auch die Lage starker Absorptionsgebiete mehratomiger Gase, die eine Elektronenaffinität besitzen, nachweisen kann oder bei Untersuchung einatomiger Gase höhere Glieder der Absorptionsserie anregen bzw. den Energieaufwand zur Erreichung der Grundbahnen höherer Serien feststellen kann.

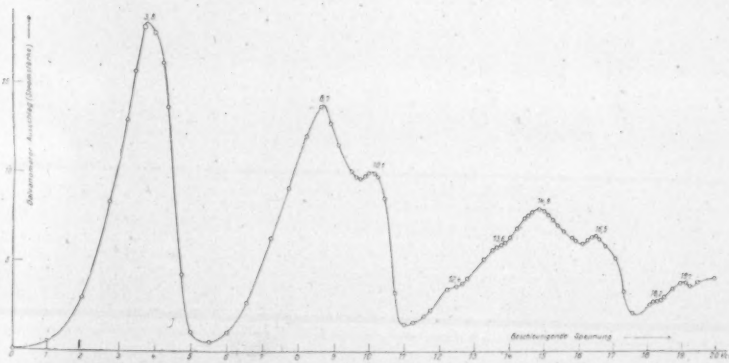


Fig. 2.

Man erteilt dazu, wie es die Fig. 3 zeigt, den vom Glühdraht D emittierten Elektronen ihre Beschleunigung auf einem Wege, der so

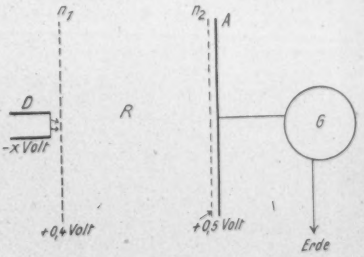


Fig. 3.

kurz ist, daß die meisten Elektronen keine Zusammenstöße auf ihm erfahren und folglich die angelegte Spannung frei durchlaufen. Erst nachdem die Elektronen die gewünschte Geschwindigkeit haben, läßt man sie durch ein Netz in einen Raum R eintreten, in dem sie mit den Atomen oder Molekülen zusammenstoßen. Nachdem sie den Stoßraum durch ein zweites Netz verlassen haben, bestimmt man wieder den Bruchteil, der eine von Null verschiedene kinetische Energie hat. Eine genaue Durchmessung des von diesen Elektronen getragenen Stromes als Funktion der beschleunigenden Spannung zeigt neben den starken Maximis, die der Anregung der Resonanzlinien entsprechen, noch weitere schwache Maxima, die den Übergang der Atome in einen höheren Quantenzustand anzeigen. Im Falle des Quecksilbers sind dabei unter anderen die Serienglieder $1{,}5\ S - 2\,p_1$ und $1{,}5\ S - 2\,p_3$ gefunden worden, die nach optischen Methoden, wie weiter unten ausgeführt wird, nicht beobachtbar sein können.

Die Fig. 4 zeigt das Auftreten dieser sekundären Maxima in diesem Fall[1]).

Wie erwähnt, ist das Verfahren auch auf mehratomige Gase angewandt worden mit dem Resultate, daß auch hier deutliche Maxima auftraten. Diese Tatsache ist ein Beweis da-

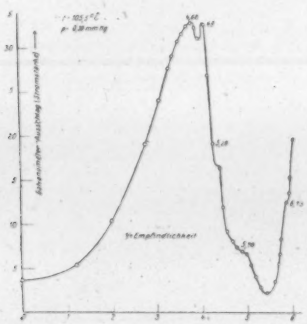


Fig. 4.

für, daß der quantenhafte Energieverlust, der zur Lichtanregung führt, im allgemeinen groß ist gegen die durch Einwirkung der Elektronenaffinität eintretenden Energieverluste bei der halbelastischen Reflexion. Die Voltwerte der Maxima gestatten jedoch nur nach der $h\nu$ Beziehung, die Wellenlänge starker Absorptionsgebiete festzustellen, und es scheint uns unberechtigt, wenn von einer Zahl von Forschern die Meinung vertreten wird, daß man auf diese Weise eine Resonanzspannung von Jod, Schwefel, Phosphor, Stickstoff usw. feststellen könne. Die Moleküle werden im Normalzustand durch das stoßende Elektron getroffen. Dabei werden primär naturgemäß Bandenspektren angeregt. Die Anregung von Linienspektren tritt unter gleichzeitiger Dissoziation des Moleküls als ein sekundärer Prozeß auf, wie weiter unten diskutiert wird. Wir wollen die eben beschriebene Methode im weiteren Texte als unelastischen Elektronenstoß II bezeichnen.

Die zweite Untersuchungsart für Anregungs- und Ionisierungsspannung, die oft benutzt wird, ist die alte Lenardsche Methode in zwei neuen Modifikationen. Die erste dieser Modifikationen stammt von B. Davis und F. Goucher[1]), die zweite anscheinend gleichzeitig von Frank Horton[2]), Franck und Knipping[3]) und Foote und Mohler[4]).

Das allgemeine Prinzip ist, daß man sich wie oben Elektronen gegebener Geschwindigkeit herstellt (siehe Fig. 5), sie durch ein Netz in einen Raum R eintreten läßt, in dem sie mit Atomen zusammenstoßen und sie dann

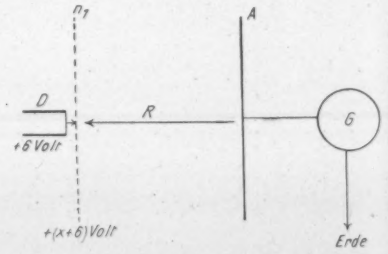


Fig. 5.

durch starke Gegenfelder wieder zurückwirft. Beobachtet werden nur die bei den Zusammenstößen an den Atomen ausgelösten direkten oder indirekten elektrischen Wirkungen. Direkte Wirkungen treten auf, sobald die kinetische Energie der Elektronen genügt, um die getroffenen Atome zu ionisieren, so daß positive Ionen an einer Elektrode gesammelt werden können. Indirekte Wirkungen, wenn die Geschwindigkeit der Elektronen nur genügt, um die Atome zur Lichtaussendung anzuregen. Das Licht löst dann an der Sammel-

1) J. Franck u. E. Einsporn, Zeitschrift f. Physik.

1) B. Davis u. F. Goucher, Phys. Rev. **10**, 84, 1917.
2) Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. **95**, 108, 1919.
3) Franck u. Knipping, diese Zeitschr. **20**, 481, 1919.
4) Foote u. Mohler, Phys. Rev. **15**, 321, 1920.

elektrode einen Photoeffekt aus. Die Wirkung ist in diesem Falle ein Elektronenverlust des Auffängers, also ebenfalls eine positive Aufladung wie bei der Ionisation. Davis und Goucher haben zwischen den beiden Effekten zu unterscheiden gelehrt, indem sie vor der Sammelelektrode (siehe Fig. 6) ein zweites

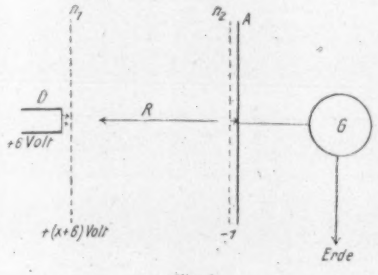


Fig. 6.

Drahtnetz anbrachten und zwischen dieses und die Elektrode ein schwaches Feld so legten, daß die lichtelektrisch ausgelösten Elektronen zum Auffänger zurückgezogen werden, dagegen erreichen die am Netz ausgelösten Elektronen jetzt den Auffänger und laden ihn negativ auf. Bei der Spannung, bei der Ionisation eintritt, kehrt der Strom seine Richtung um und geht zu positiven Werten über.

Die Fig. 7 bringt in den Kurven II a und

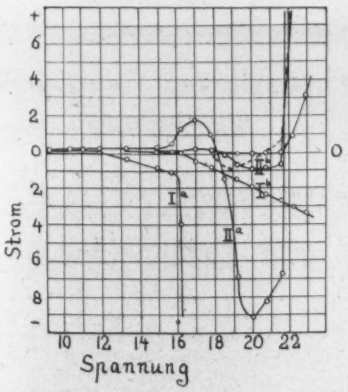


Fig. 7.

II b ein Beispiel, aus dem das geschilderte Verhalten deutlich hervorgeht; sie ist einer Arbeit von Frank Horton und Ann Davies über Lichtanregung und Ionisation des Neons entnommen [1]). Wir haben dieses Beispiel gewählt, weil es außer der wichtigen Unterscheidung zwischen den beiden Atomprozessen auch die Begrenztheit der Methode zeigt. Die genannten Verfasser schließen aus solchen Kurven auf 3 Ionisierungsspannungen und 2 Resonanzspannungen, während wir nur je einen Wert als Resonanzspannung und einen als Ionisierungsspannung für reell halten. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, die weiter unten besprochen werden sollen, sei auf folgende Eigenschaften der Methode, die zu Täuschungen Anlaß geben können, hingewiesen. Die negative Aufladung des Auffängers wird, wie oben erwähnt, durch lichtelektrisch am Drahtnetz n_2 der Fig. 6 ausgelöste Elektronen bedingt, aber nur ein Teil dieser Elektronen wird zum Auffänger hingezogen, ein anderer Teil wird in umgekehrter Richtung in den Stoßraum hinein beschleunigt durch die starke Spannung, die die vom Glühdraht kommenden Elektronen zurückwirft. Da die Schaltung meistens so ausgeführt ist, daß diese Bremsspannung der Primärelektronen immer um einige Volt höher ist als ihre Beschleunigungsspannung, so können die lichtelektrischen Elektronen schon eine Geschwindigkeit erreichen, die sie befähigt, Atome zu ionisieren, ehe die Primärelektronen die Ionisierungsspannung durchlaufen haben. Diese sekundäre Ionisation bewirkt eine Umkehr des Stromes, die je nach den Bedingungen bei verschiedenen Voltwerten liegt. Im Falle des Wasserstoffs (Dissertation Krüger) und im Falle des Quecksilbers (Dissertation Einsporn) haben wir den Umkehrpunkt je nach Wahl der Verhältnisse um mehrere Volt verschieben können. Die Lage der wahren Ionisierungsspannung markiert sich dabei immer an derselben Stelle durch den starken Zuwachs der Stromstärke. Wir werden auf diesen Einfluß der sekundären Ionisation noch einige Male zurückkommen müssen.

Die zweite Modifikation des Lenardschen Verfahrens verzichtet auf die qualitative Unterscheidung zwischen Lichtanregung und Ionisation und ersetzt sie durch Beobachtung der quantitativen Unterschiede zwischen diesen beiden Effekten, da die Ionisation viel stärkere Ströme liefert.

1) Frank Horton u. Ann Davies, Proc. Roy. Soc. London A. **98**, 124, 1920.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik. Dreizehnte, stark vermehrte Auflage (43.—46. Tausend). Neu bearbeitet von H. Geiger, E. Grüneisen, L. Holborn, K. Scheel und E. Warburg. gr. 8°. XXVIII u. 724 S. m. 353 Figuren im Text. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1921. Gebunden M. 34.—. (Hierzu Teuerungszuschlag des Verlags 120 Proz.).

Trotz des stark vermehrten Inhaltes des Buches hat sein Umfang gegenüber der letzten Auflage etwas abgenommen. Das wurde erreicht durch Zusammenziehung verwandter Aufgaben und Fortlassung der geographischen Bestimmungen. Größere Umarbeitung erfuhren die Kapitel über Druckmessung (neu aufgenommen: Druckmessung aus der Reibung, aus der Radiometerwirkung und aus der Wärmeleitung), über Thermometrie (alle Temperaturangaben beziehen sich auf die reproduzierbare Skala der Reichsanstalt, die der thermodynamischen Skala sehr nahe kommt), über Kalorimetrie und über Strahlungsmessung. Der Abschnitt über Wechselströme ist stark vermehrt, ebenso der über Röntgenstrahlen, wo die Methoden zur spektralen Zerlegung ausführlich behandelt werden. Im Kapitel elektrische Schwingungen sind die Verstärkerröhren in den verschiedenen Schaltungen eingehend berücksichtigt. Die Messungen an ionisierten Gasen und die Radioaktivität sind bis zu den neuesten Resultaten fortgeführt.

Die Tabellen sind ergänzt. Als neu hinzugekommen ist eine Korrektionstabelle für Pentan-, Toluol- und Alkohol-Thermometer, ferner Tabellen für den spezifischen Widerstand von Isolatoren, für die Spannung der Metalle bezogen auf eine normale Wasserstoffelektrode, für das periodische System der Elemente, für die Exponentialfunktionen e^x und e^{-x} für $x = 0$ bis $x = 6$ (von $x = 0$ bis $x = 1$ in Stufen von 0,01, von $x = 1$ bis $x = 6$ in Stufen von 0,1). Die alte Tabelle über die linearen Ausdehnungskoeffizienten, die spezifische Wärme, das Wärmeleitvermögen usw. für feste Stoffe ist auf das Doppelte vergrößert.

Wünschenswert dürfte es wohl sein, wenn in der nächsten Auflage eine Tabelle über die Ionisierungsspannungen und die Resonanzpotentiale aufgenommen würde.

Eine neue Auflage des „Kohlrausch", dieser conditio sine qua non des Physikers, bedarf wohl für den Leser dieser Zeitschrift keiner besonderen Empfehlung, besonders wenn sie wie die vorliegende 13. Auflage so bis zum letzten Stande der Wissenschaft weitergeführt ist.

Zu bemerken bleibt, daß trotz der Zeitumstände Papier und Druck ausgezeichnet sind. Edgar Meyer.

Berichtigungen

zu der Arbeit „Rotierende Bezugssysteme in einer Minkowskischen Welt" von Friedrich Kottler[1]).

Bei der Revision der genannten Arbeit sind die folgenden Berichtigungen weggeblieben, die sich hingegen in den Sonderabdrücken bereits berücksichtigt finden:

1) Diese Zeitschr. **22**, 274—280, 1921.

Zu Nr. 4 auf S. 275 nach den Worten des Textes: „Unsere Voraussetzung der Unabhängigkeit der Längen von der stationären Beschleunigung trifft hier nicht zu, da die hier vorzunehmende Beschleunigung eine nicht stationäre ist". Anmerkung: Man beachte, daß die Fiktion der Starrheit mit dem Ehrenfestschen Paradoxon unverträglich ist.

Zu Nr. 4 auf S. 276 nach den Worten des Textes: „Diese Richtung ist mathematisch definiert durch die gerade Linie und diese wieder als kürzeste Verbindungslinie AB". Anmerkung: Die natürliche Geometrie auf der rotierenden Kreisscheibe ist nach Nr. 3 eine nichteuklidische Geometrie in einer euklidischen Ebene. Daher erscheinen ihre „Geraden" dem ruhenden Beobachter im allgemeinen krumm!

In Formel (5a) auf S. 279 hat es zu heißen:

$$\frac{\omega^2}{c^2 - x'^2\omega^2 - y'^2\omega^2} \text{ statt } \frac{\omega^2}{c^2 - x'^2 + y'^2\omega^2}.$$

Auf S. 280 hat es statt $\tau(XYZT)$ zu heißen: $\tau(x'y'z't)$ und einige Zeilen tiefer nach der Formel

$$g_{14}dx' + g_{24}dy' + g_{44}dt = \lambda d\tau$$

ist einzuschalten: wo λ irgendein variabler Faktor ist.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau Dr. Max Dehn in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt a. M.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer (infolge Eintritt in den Vorstand der Hartmann & Braun A.G. Frankfurt/Main).

Gesuche.

Physikalisches Forschungsunternehmen

in Universitätsstadt sucht zum sofortigen Eintritt

mehrere Physiker, Geophysiker oder Elektrotechniker

mit abgeschlossener Hochschulbildung möglichst auch mit Vorkenntnissen auf geologischem oder bergbaulichem Gebiete. Anschriften mit Bildungsgang usw. unter **S. H. 580** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 2400000.

50471. Experimentier-Schalttafel Type A, 110 Volt, 30 Amp.

Physikalische Apparate

Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

S. HIRZEL IN LEIPZIG

In den nächsten Tagen erscheint:

Über die Kernstruktur der Atome

Baker-Vorlesung von Ernest Rutherford

Mitglied d. Royal Society, Prof. der Experimentalphysik an der Univ. Cambridge

Autorisierte Übersetzung von Dr. ELSE NORST

Preis geh. 7 Mark :: **Für Physiker u. Chemiker**

Heute haben Übersetzungen fremdsprachiger Arbeiten bei uns in Deutschland nicht mehr wie früher vornehmlich den Zweck, der Bequemlichkeit und dem Verständnis dadurch zu dienen, daß sie dem mit der fremden Sprache nicht genügend Vertrauten das Lesen ermöglichen oder erleichtern. Heute sind Übersetzungen für uns kein solcher „Luxus" mehr, sondern leider ein notwendiger „Ersatz" für die oft unerreichbaren und meist unerschwinglichen ausländischen Schriften geworden. Und so ist auch die Übersetzung der Rutherfordschen Baker-Vorlesung, die nur in einigen wenigen Exemplaren zu uns herüber kam, durch den Wunsch entstanden, ihren Inhalt dem gewiß sehr weiten Kreise der daran Interessierten leicht erreichbar zu machen.

Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. — Zusammenfassende Bearbeitungen, B. — Besprechungen.)

Seite

Adler, F., Ortszeit, Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik. (B.) 414
Aluminium: Über die Wärmeausdehnung der — Zink-Legierungen, v. A. Schulze 403
Atome: Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der —, v. A. Smekal 400
Chemische Elemente: Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den —, v. K. Fajans. (B.) 415
Einheiten und Formelgrößen: Ausschuß für — (Tagesereignisse) 416
Elektrischer Wind: Die Bedeutung des — für den Induktionsfunken, v. F. Trey 406
Elektrodynamik: Ortszeit, Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der —, v. F. Adler. (B.) 414
Emersleben, O., Freie Schwingungen in Kondensatorkreisen 393

Fajans, K., Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen. (B.) 415
Farbentheorie: Bemerkung zur Ostwaldschen sogenannten —, v. K. W. F. Kohlrausch 402
Franck, J., Über Lichtanregung und Ionisation von Atomen und Molekülen durch Stöße langsamer Elektronen. (Fortsetzung.) (Z. B.) 409
Induktionsfunken: Die Bedeutung des elektrischen Windes für den —, v. F. Trey 406
Kohlrausch, K. W. F., Bemerkung zur Ostwaldschen sogenannten Farbentheorie 402
Kondensatorkreise: Freie Schwingungen in —, v. O. Emersleben 393
Legierungen: Über die Wärmeausdehnung der Aluminium-Zink —, v. A. Schulze 403
Ortszeit: — Systemzeit, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik, v. F. Adler. (B.) 414
Ostwald: Bemerkungen zur — schen sogenannten Farbentheorie, v. K. W. F. Kohlrausch 402
Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen, v. K. Fajans. (B.) 415
Röntgenspektren: Über die Erklärung der — und die Konstitution der Atome, v. A. Smekal 400
Schulze, A., Über die Wärmeausdehnung der Aluminium-Zink-Legierungen 403
Schwingungen: Freie — in Kondensatorkreisen, v. O. Emersleben 393
Smekal, A., Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome 400
Systemzeit: Ortszeit, —, Zonenzeit und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik, v. F. Adler. (B.) 414
Trey, F., Die Bedeutung des elektrischen Windes für den Induktionsfunken 406
Wärmeausdehnung: Über die — der Aluminium-Zink-Legierungen, v. A. Schulze 403
Zink: Über die Wärmeausdehnung der Aluminium- — Legierungen, v. A. Schulze 403
Zonenzeit: Ortszeit, Systemzeit, — und das ausgezeichnete Bezugssystem der Elektrodynamik, v. F. Adler. (B.) 414

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation

von

P. Lenard

Heidelberg

Dritte Auflage

mit einem Zusatz, betreffend die Nauheimer Diskussion.

Preis 5 Mark

Neueste Konstruktion!

Kurzrohrfernrohr D.R.P. 260814.

Franz Schmidt & Haensch

Berlin S. 42, Prinzessinnenstraße 16

Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.

Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.

Preislisten kostenlos.